

# Курс «Космическая картография»

## Лекция 04

# Перспективная проекция для случая планеты произвольной формы

ver. 2014.09.13

**Корохин Виктор Валентинович**

[v.v.korokhin@gmail.com](mailto:v.v.korokhin@gmail.com)

Institute of Astronomy,  
Kharkiv V.N. Karazin National University, Ukraine

2014, Харьков

# План лекции

1. Постановка задачи
2. Основные системы координат
3. Параметры, задающие проекцию
4. Переход от прямоугольных координат на плоскости перспективной проекции (на изображении) к планетографическим координатам
5. Переход от планетографических координат к прямоугольным координатам на плоскости перспективной проекции (на изображении)

# Постановка задачи

## Фигуры различных тел Солнечной Системы

Косм. тело	Полярное сжатие	Экв. радиус, км	Перепад высот, км	Перепад высот, в $R_{экв}$
<b>Солнце</b>	$9 \cdot 10^{-6}$	$6.9551 \cdot 10^5$		
<b>Луна</b>	0.00125	1738.1	до 20	0.0115
<b>Земля</b>	0.0033528	6378,1	<u>19.842</u>	0.0031
<b>Марс</b>	0.00589	3396.2	до 35-37	0.0106
<b>Юпитер</b>	0.06487	71492.0		
<b>Сатурн</b>	0.09796	60268.0		
<b>Астероиды и кометы</b>				

**Фигуры многих космических тел далеки от сферы, и на многих из них сложный рельеф (перепады высот)**

**E.V. Shalygin, Yu.I. Velikodsky, V.V. Korokhin,  
and O.S. Shalygina.**

Formulas of the Perspective Cartographic Projection for  
Planets and Asteroids of Arbitrary Shape

**Формулы опубликованы в работах [1, 2, 3]**

**Алгоритмы реализованы в рамках  
программной системы xIRIS  
(БПК – Библиотека Планетной Картографии)**

# Описание фигуры планеты

## 1. Самый общий вид

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

## 2. Эллипсоид вращения

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1, \quad (2)$$

где А, В, С – полуоси эллипса.

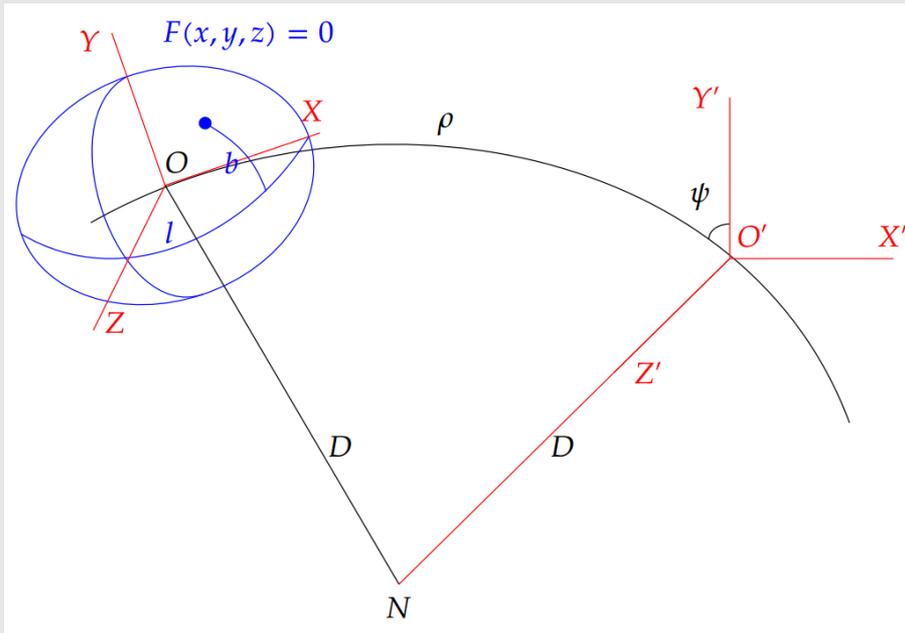
## 3. Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (3)$$

## 4. Сфера с картой локальных высот $h(x, y, z)$ (откл. от сферы)

$$x^2 + y^2 + z^2 = (R + h(x, y, z))^2. \quad (4)$$

# Основные системы координат

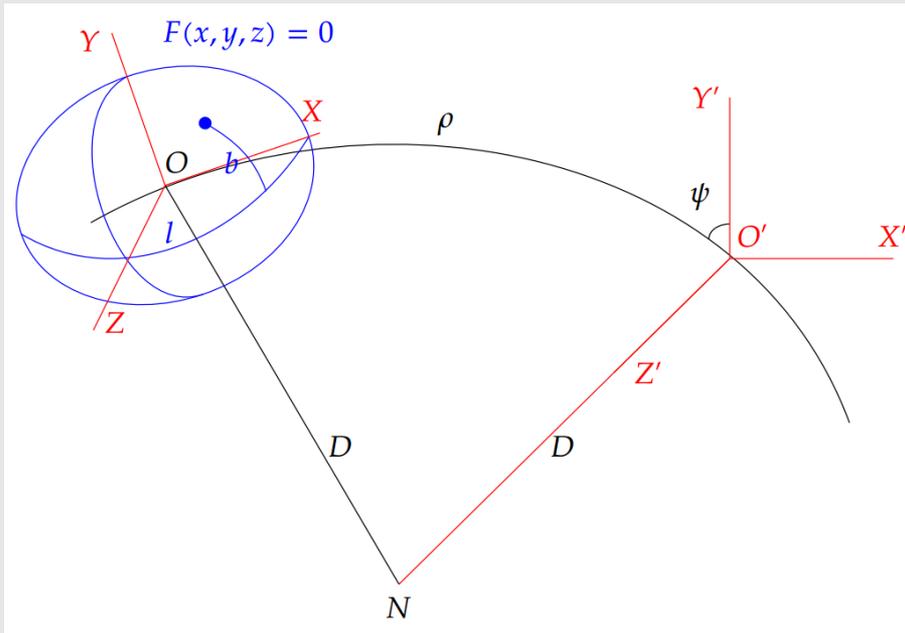


$(x_P, y_P)$  – координаты точки на плоскости изображения.

$(XYZ)$  – система координат (СК) с началом координат (НК) в центре планеты  $O$ . Ось  $Y$  направлена на сев. полюс. Ось  $Z$  направлена на точку с нулевыми планетоцентрич. координатами  $l = b = 0$ .

$(X'Y'Z')$  – СК с НК в точке пересечения линии визирования и плоскости проекции  $O'$ . Оси  $X'$  и  $Y'$  совпадают с осями  $X_P$  и  $Y_P$  на плоскости изображения. Ось  $Z'$  направлена на наблюдателя  $N$  (точку проекции).  $X'O'Z'$  – это плоскость проекции (ПП). Координаты наблюдателя в этой СК  $x' = y' = 0$ ,  $z' = D$ .

# Параметры, задающие проекцию



$D$  – расстояние от наблюдателя до центра планеты и от наблюдателя до ПП.

$\rho$  – угол отклонения линии визирования от направления на центр планеты (для КА – это отклонение от надира).

$\psi$  – азимут этого отклонения.

Отсчитывается в плоскости

изображения от позитивного направления оси  $Y'$  против час. стрелки. Для поперечной (экваториальной, англ. Vertical) проекции  $\rho = \psi = 0$ .

$b_0, l_0$  – планетографические координаты поднаблюдательной точки.

Во всех СК координаты отсчитываются в одинаковых единицах (например, в км или в экват. радиусах планеты).

**Переход от прямоугольных координат  
на плоскости перспективной проекции  
(на изображении)  
к планетографическим координатам**

$$(x_p, y_p) \rightarrow (l, b)$$

## Этап А: $(x_p, y_p) \rightarrow (x, y, z)$

Переход от прямоугольных координат на изображении к Декартовым координатам, связанным с планетой

Уравнение линии визирования в системе  $(XYZ)$ :

$$\frac{x - x_N}{x_A - x_N} = \frac{y - y_N}{y_A - y_N} = \frac{z - z_N}{z_A - z_N}, \quad (5)$$

где  $(x_N, y_N, z_N)$  – координаты наблюдателя,  $(x_A, y_A, z_A)$  – координаты точки на плоскости проекции, соответствующей  $(x_p, y_p)$ .

Координаты наблюдателя:

$$\begin{cases} x_N = D \cdot \sin l_0 \cos b_0 \\ y_N = D \cdot \sin b_0 \\ z_N = D \cdot \cos l_0 \cos b_0 \end{cases}, \quad (6)$$

где  $l_0, b_0$  – планетоцентрические координаты наблюдателя.

# 1. Переход в систему координат $(x_1, y_1, z_1)$ с началом в центре планеты

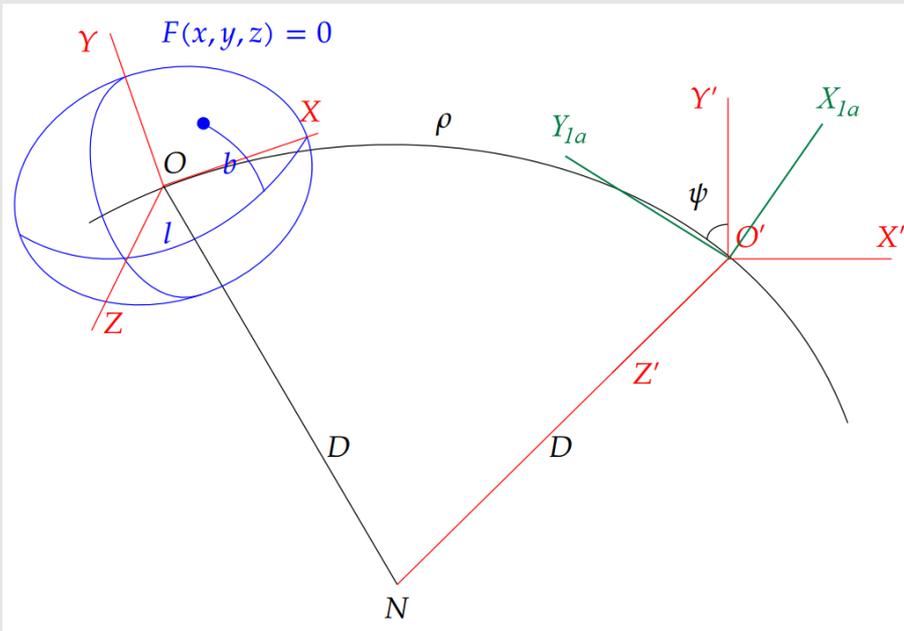
*Производится в 4 приема:*

*(a) поворот → (b) сдвиг → (c) поворот → (d) сдвиг.*

**(1a) Поворот на угол  $\psi$  вокруг оси  $Z'$ ,  
чтобы поместить  
центр планеты в плоскость  $Y_{1a}O'Z_{1a}$**

$$\begin{bmatrix} x_{1a} \\ y_{1a} \\ z_{1a} \\ 1 \end{bmatrix} = MR_1^1 \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad MR_1^1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

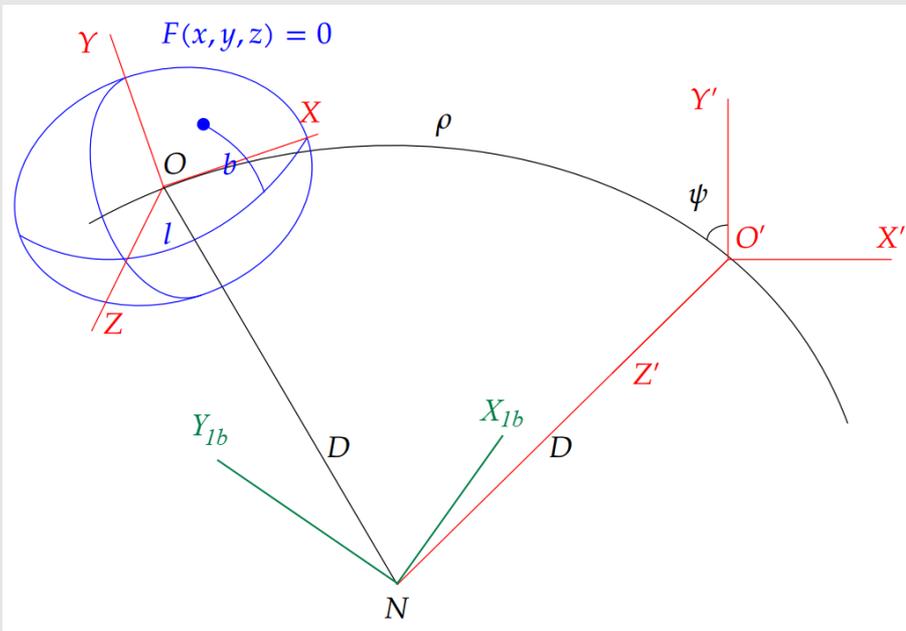
Запись в обычной форме:



$$\begin{cases} x_{1a} = x' \cdot \cos \psi + y' \cdot \sin \psi \\ y_{1a} = -x' \cdot \sin \psi + y' \cdot \cos \psi \\ z_{1a} = z' \end{cases}$$

## (1b) Сдвиг начала координат в точку наблюдателя N

$$\begin{bmatrix} x_{1b} \\ y_{1b} \\ z_{1b} \\ 1 \end{bmatrix} = MT_1^1 \cdot \begin{bmatrix} x_{1a} \\ y_{1a} \\ z_{1a} \\ 1 \end{bmatrix} \quad MT_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

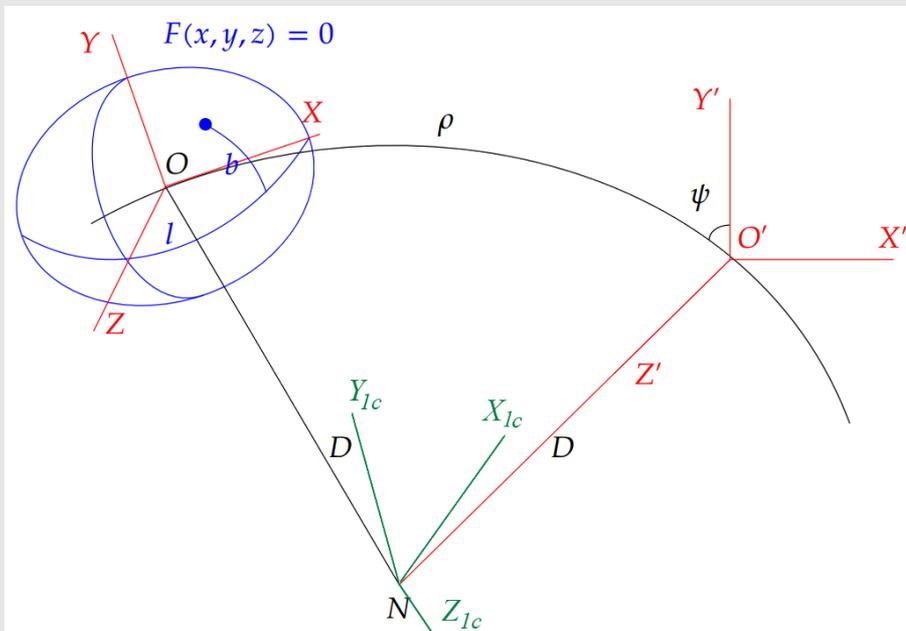


Запись в обычной форме:

$$\begin{cases} x_{1b} = x_{1a} \\ y_{1b} = y_{1a} \\ z_{1b} = z_{1a} - D \end{cases}$$

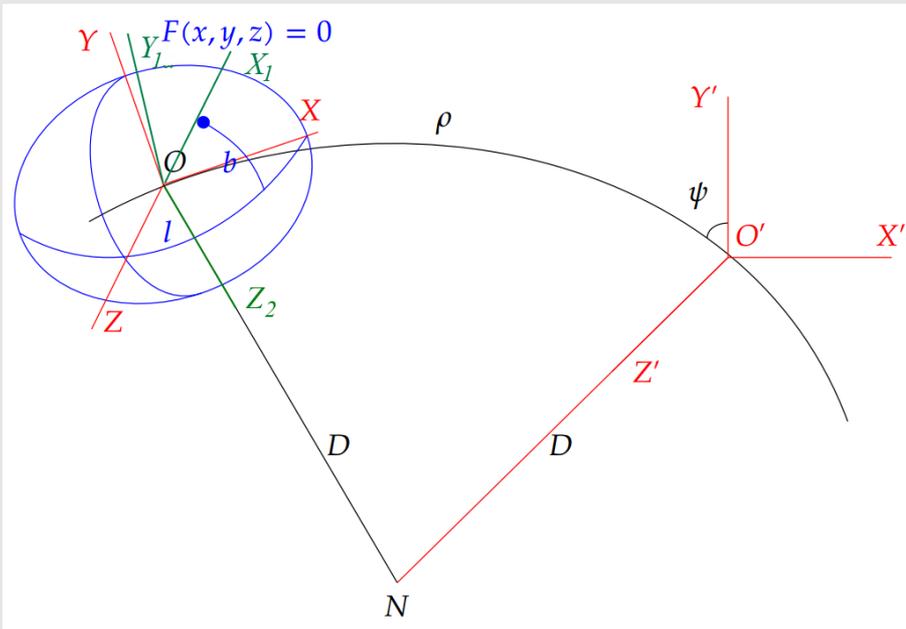
**(1c) Поворот на угол  $\rho$  вокруг оси  $X_{1b}$ ,  
чтобы поместить  
центр планеты на ось  $Z_{1c}$**

$$\begin{bmatrix} x_{1c} \\ y_{1c} \\ z_{1c} \\ 1 \end{bmatrix} = MR_2^1 \cdot \begin{bmatrix} x_{1b} \\ y_{1b} \\ z_{1b} \\ 1 \end{bmatrix} \quad MR_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \rho & \sin \rho & 0 \\ 0 & -\sin \rho & \cos \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$



## (1d) Сдвиг начала координат в центр планеты

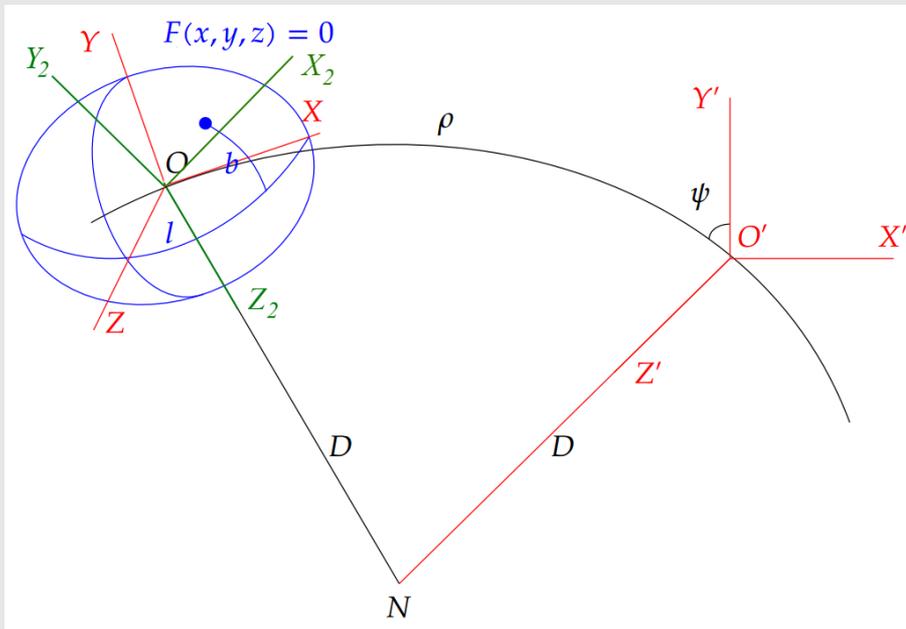
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = MT_2^1 \cdot \begin{bmatrix} x_{1c} \\ y_{1c} \\ z_{1c} \\ 1 \end{bmatrix} \quad MT_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$



## 2. Поворот вокруг оси $Z_1$ , чтобы поместить центральный меридиан планеты вдоль ось $Y_2$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = MR_3^1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad MR_3^1 = \begin{bmatrix} \cos(P_0 - \psi) & \sin(P_0 - \psi) & 0 & 0 \\ -\sin(P_0 - \psi) & \cos(P_0 - \psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

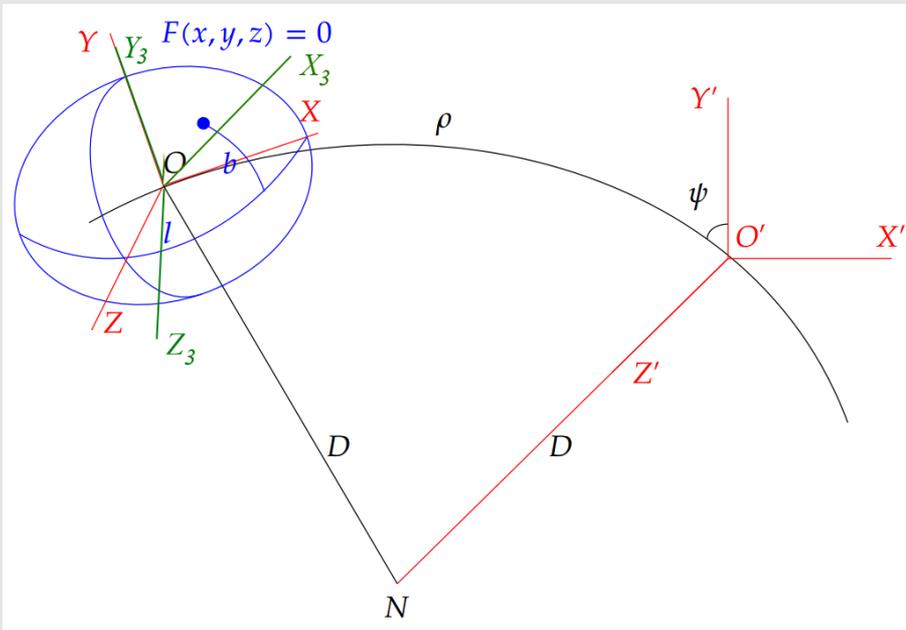
где  $P_0$  – позиционный угол проекции полярной оси планеты на изображении, отсчитываемый от направления «север - вверх» против часовой стрелки.



$(P_0 - \psi)$  – позиционный угол, отсчитываемый от направления от центра планеты к центру косой перспективной проекции.

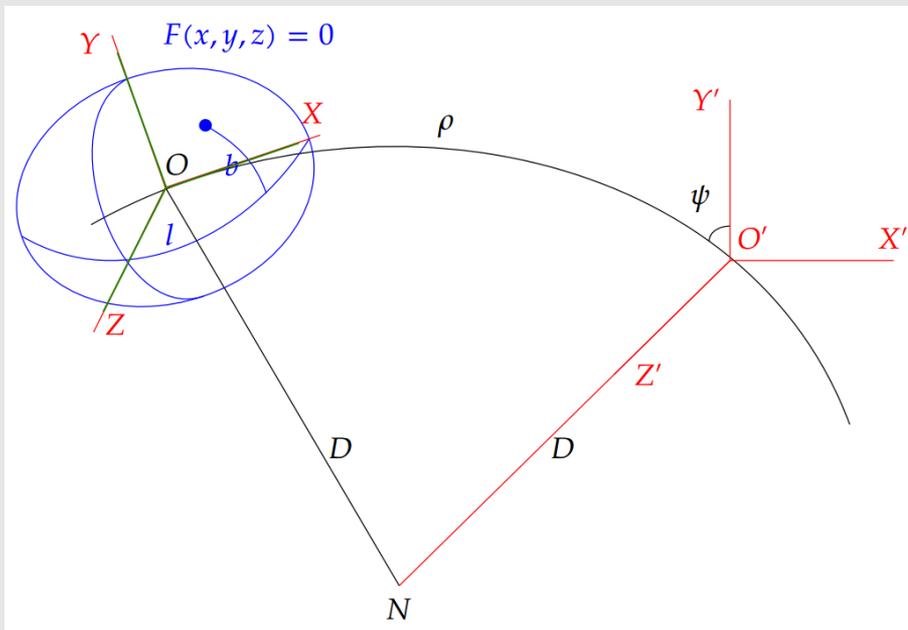
3. Поворот на угол  $b_0$  вокруг оси  $X_2$  (лежащей в плоскости экватора планеты) с тем, чтобы ось  $Y_3$  оказалась направленной на северный полюс планеты:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} = MR_4^1 \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad MR_4^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b_0 & \sin b_0 & 0 \\ 0 & -\sin b_0 & \cos b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$



**4. Поворот на угол  $l_0$  вокруг оси  $Y_3$ , чтобы ось  $Z$  оказалась направленной на точку с нулевыми планетограф. координатами:**

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = MR_5^1 \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad MR_5^1 = \begin{bmatrix} \cos l_0 & 0 & \sin l_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin l_0 & 0 & \cos l_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$



## Процедура $(x_p, y_p) \rightarrow (x, y, z)$ в матричной форме

В нашем случае  $(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A)$ .

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ 1 \end{bmatrix} = MR_5^1 \cdot MR_4^1 \cdot MR_3^1 \cdot MT_2^1 \cdot MR_2^1 \cdot MT_1^1 \cdot MR_1^1 \cdot \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Для вычисления координат точки на поверхности планеты  $(x, y, z)$  необходимо решить систему (5) вместе с уравнением (1). Необходимо найти все решения – все точки пересечения прямой с поверхностью и выбрать точки, находящиеся на минимальном расстоянии:

$$d = (x_N - x)^2 + (y_N - y)^2 + (z_N - z)^2. \quad (15)$$

## Случай эллипсоида

В случае эллипсоида (уравнение (2)) задача сводится к решению квадратного уравнения:

$$\begin{cases} z = \frac{1}{c_2} (-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - c_2(a_2^2 + a_4^2 - 1)}) \\ y = A(a_1 z + a_2) \\ z = B(a_3 z + a_4) \end{cases}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= (1/A) \cdot (x_A - x_N) / (z_A - z_N), & a_2 &= x_N / A - a_1 \cdot z_N, \\ a_3 &= (1/B) \cdot (y_A - y_N) / (z_A - z_N), & a_4 &= y_N / B - a_3 \cdot z_N, \\ c_1 &= a_1 a_2 + a_3 a_4, & c_2 &= a_1^2 + a_3^2 + 1/C^2. \end{aligned}$$

Решение с меньшим  $d$  (15) соответствует ближней стороне планеты.

## Этап В: $(x, y, z) \rightarrow (l, b)$

Переход от Декартовых координат, связанных с планетой, к планетографическим

По определению планетоцентрических координат  $(l, b)$ :

$$\begin{cases} b = \arcsin(y/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ l = \arctan(x/z) - \pi \operatorname{sign}(z)(1 - \operatorname{sign}(z))/2. \end{cases} \quad (17)$$

---

*\*Благодаря применению функции  $\operatorname{sign}()$  удается избежать неоднозначности функции  $\arctan()$ .*

**Переход от планетографических координат  
к прямоугольным координатам на плоскости  
перспективной проекции  
(на изображении)**

$$(l, b) \rightarrow (x_p, y_p)$$

## Этап А: $(l, b) \rightarrow (x, y, z)$

### Переход от планетографических координат к Декартовым, связанным с планетой

Координаты точки на поверхности планеты  $(x, y, z)$  находятся путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x \cos l - z \sin l = 0 \\ y \cos b - (x \sin l + z \cos l) \sin b = 0, \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

где первые 2 уравнения описывают прямую, соотв. направлению от центра планеты к точке с координатами  $(l, b)$ , а третье описывает фигуру поверхности планеты. Ищется точка пересечения.

## Случай эллипсоида

В случае эллипсоида решение выглядит так:

$$\begin{cases} x = r(b, l) \cos b \sin l \\ y = r(b, l) \sin b \\ z = r(b, l) \cos b \cos l \end{cases}, \quad (19)$$

где

$$r(b, l) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 b \sin^2 l}{A^2} + \frac{\sin^2 b}{B^2} + \frac{\cos^2 b \cos^2 l}{C^2}}}.$$

## Этап В: $(x, y, z) \rightarrow (x_p, y_p)$

Переход от Декартовых координат,  
связанных с планетой,

к прямоугольным координатам на изображении

Применяется инверсное преобразование:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = MR_5^2 \cdot MT_2^2 \cdot MR_4^2 \cdot MT_1^2 \cdot MR_3^2 \cdot MR_2^2 \cdot MR_1^2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Точка на плоскости проекции  $(x', y', z')$ , точка наблюдателя  $(0, 0, -D)$  и точка на изображении  $(x_p, y_p, 0)$  (в СК  $(X'Y'Z')$ ) расположены на одной прямой. Следовательно, должно выполняться следующее выражение:

$$\frac{x_p}{x'} = \frac{y_p}{y'} = \frac{-D}{z' - D}.$$

Следовательно,  $x_p = x' D / (D - z')$ ,  $y_p = y' D / (D - z')$ . (21)

# Матрицы трансформаций

$$MR_5^2 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad MT_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MR_4^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \rho & -\sin \rho & 0 \\ 0 & \sin \rho & \cos \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad MT_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MR_3^2 = \begin{bmatrix} \cos(P_0 - \psi) & -\sin(P_0 - \psi) & 0 & 0 \\ \sin(P_0 - \psi) & \cos(P_0 - \psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MR_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b_0 & -\sin b_0 & 0 \\ 0 & \sin b_0 & \cos b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad MR_1^2 = \begin{bmatrix} \cos l_0 & 0 & -\sin l_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin l_0 & 0 & \cos l_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Задание для самостоятельной работы

1. Вывести формулы преобразования координат для сферической планеты.
2. Используя работу [1], изучить алгоритм вычисления фотометрических углов (5 Transformation  $(x, y, z) \rightarrow (\alpha, i, \epsilon)$ ).

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **E.V. Shalygin, Yu.I. Velikodsky, V.V. Korokhin, and O.S. Shalygina.** Formulas of the Perspective Cartographic Projection for Planets and Asteroids of Arbitrary Shape:  
<http://www.astron.kharkov.ua/dslpp/cartography/carthography.pdf>
2. **E.V. Shalygin, Yu.I. Velikodsky, and V.V. Korokhin.** Formulas of the Perspective Cartographic Projection for Planets and Asteroids of Arbitrary Shape:  
<http://www.astron.kharkov.ua/dslpp/cartography/>
3. **E.V. Shalygin, Yu.I. Velikodsky, and V.V. Korokhin.** Formulas of the Perspective Cartographic Projection for Planets and Asteroids of Arbitrary Shape. // Lunar and Planet. Sci. 34-rd. Abstract #1946. 2003. LPI. Houston:  
<http://www.lpi.usra.edu/meetings/lpsc2003/pdf/1946.pdf>

**Ура! Это всё!**