

Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

*К 200-летию Харьковского национального
университета имени В .Н .Каразина*

Ю. В. Александров

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

*Утверждено Министерством образования науки Украины как учебник
для студентов университетов, обучающихся
по специальности „Астрономия”*

Харьков 2006

УДК 521.1 (075.8)

ББК 22.62

А 46

*Утверждено Министерством образования и науки Украины как учебник для студентов университетов, обучающихся по специальности «Астрономия»
(письмо № 1/11-532 от 11.02.04)*

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой космических геоинформационных технологий Киевского национального авиационного университета Железняк О. А.
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры астрономии Одесского национального университета имени И. И. Мечникова Базей А. А.

Научный редактор: доктор физико-математических наук, профессор кафедры астрономии и физики космоса Киевского национального университета имени Т. Г. Шевченко Андриенко Д. А.

A 46 **Александров Ю. В. Небесная механика:** Учебник.– Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2006.– 256 с.– Табл. 5. Илл. 43. Библиогр. 48 назв.

ISBN 966-623-261-8

Учебник содержит основные разделы небесной механики – задачу двух тел и некоторые ее обобщения, задачу многих тел, основы теории возмущенного движения, задачу трех тел, элементы теории движения Луны и планет. Как иллюстрация общих методов теории возмущений рассматривается возмущенное движение спутника планеты.

Предназначен для студентов университетов по специальности «Астрономия», а также студентов и специалистов по механике и космическим исследованиям.

Course contains such basic parts (problems, tasks) of celestial mechanics as two-body problem and its some generalizations, many-body problem, of the disturbed motion theory, three-body problem, the elements of the Moon and planets motion theory. Disturbed motion of a planet satellites is considered as an example of general methods of the theory,

It is intended for university students learning a specialty “Astronomy” as well as for students and specialists in mechanics and space studies.

УДК 521.1 (075.8)

ББК 22.62

ISBN 966-623-261-8

© Харьковский национальный университет

имени В. Н. Каразина, 2006

© Александров Ю. В., 2006

© Дончик И. М., макет обложки, 2006

ВВЕДЕНИЕ

Небесная механика – раздел астрономии, который изучает движение небесных тел и их систем. Открытие И. Кеплером законов движения планет и формулирование Г. Галилеем принципа относительности и закона инерции подвели науку к фундаментальной проблеме – установить связь между движением материальных тел и силами, действующими между этими телами, и объяснить на этой основе движение тел Солнечной системы. Эту задачу и решил в основном И. Ньютоn [30]. Для этого ему пришлось открыть закон всемирного тяготения, установить основные законы динамики и заложить основы дифференциального и интегрального исчисления. Таким образом, с самого начала истории небесной механики стала важнейшей составляющей становления науки нового времени и ее классического образца – теоретической механики. Это было обусловлено как практическим значением проблемы (необходимостью разработки более точных методов ориентации в пространстве и времени), так и относительной простотой задачи о движении небесных тел (определяющая роль гравитации и практическое отсутствие дисипативных сил).

Исключительная стимулирующая роль небесной механики в развитии математики и точного естествознания сохранилась и в дальнейшем. В XVIII веке в работах А. Клеро, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, П. Лапласа по теории возмущенного движения, прежде всего по теории движения Луны в связи с проблемой определения долгот на море, по сути было завершено создание основ теоретической механики и математического анализа. Особенно важную роль в становлении собственно науки о движении космических тел сыграл пятитомный труд П. Лапласа «Трактат по небесной механике» [47], который и дал название научной и, соответственно, учебной дисциплине, о которой идет речь. В первой половине XIX века У. Гамильтон создал метод канонических переменных, который стал основным не только в небесной, а и вообще в теоретической механике, а также в статистической и квантовой физике. На рубеже XIX и XX веков в трудах А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре [27, 32, 33] были заложены основы качественных методов в небесной механике и в механике и математике вообще. Ныне на этой основе возникли принципиально новые научные идеи и методы изучения нелинейных процессов, которые объединяются в понятиях «синергетика», «теория самоорганизации», «теория катастроф».

Внешними вехами истории небесной механики как теоретической дисциплины было издание трудов, нередко многотомных, которые подводили итоги предыдущего и открывали перспективы дальнейшего ее развития, а также играли значительную роль в подготовке новых поколений исследователей. Главные из этих трудов приводятся в Приложении 4. Этот перечень позволяет снова вспомнить имена ученых, которые внесли основополагающий вклад в развитие небесной механики, и воспроизводит хронологическую канву ее истории.

Объектами изучения в небесной механике являются большие и малые планеты Солнечной системы, их спутники, кометы и метеорные тела, звезды как компоненты кратных систем, искусственные небесные тела. Все эти объекты небесная механика рассматривает с точки зрения их механического движения, прежде всего поступательного. *Основной задачей небесной механики* является изучение движения конечного числа материальных точек под действием сил взаимного притяжения. Это так называемая *задача многих тел*. Фундаментальное значение именно этой задачи связано с относительной удаленностью небесных тел друг от друга, а также близостью их формы к сферической, что и позволяет рассматривать их как материальные точки. Хотя в некоторых случаях (например, в теории движения ИСЗ) приходится учитывать конечные размеры и форму Земли, а также силу сопротивления атмосферы.

Основой математического аппарата небесной механики является теория обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым приводят второй закон Ньютона или формализм Лагранжа. Важную роль играют также теория степенных рядов и рядов Фурье, теория специальных функций, прежде всего функций Бесселя и Лежандра [1]. Все это сближает небесную механику с математической физикой. Широко используется векторное, а также матричное и тензорное исчисления. Естественно, что при изучении небесной механики постоянно приходится пользоваться методами и результатами теоретической механики (законы сохранения, лагранжев и гамильтонов формализмы).

В пределах астрономии небесная механика существенным образом опирается на сферическую астрономию (системы астрономических координат, редукции координат и элементов орбит) и астрометрию. Результаты этой последней являются той эмпирической базой, на которую опирается небесная механика как теоретическая дисциплина. Во взаимодействии этих двух разделов астрономии и решается прежде всего проблема определения пространственно-временной структуры Вселенной. В свою очередь методы и результаты небесной механики широко используются в астрофизике и звездной астрономии (определение орбит и масс звезд в двойных звездных системах, определение масс планет и их спутников, проблемы звездной динамики). В пограничной между небесной механикой и астрофизикой области лежит проблема осевого вращения небесных тел с учетом их деформируемости и связанная с ней теория фигур небесных тел.

Вследствие обратно квадратичной зависимости силы тяготения от расстояния дифференциальные уравнения небесной механики нелинейны и, вообще говоря, не интегрируются в конечном виде. Однако большая разница в массах небесных тел (Солнце и планеты, планета и ее спутники и т. д.) и близость формы этих тел к сферической делают широко пригодной для описания их движений (по крайней мере, в первом приближении) *задачу двух тел*, которая является интегрируемой. В этой задаче изучается движение одной материальной точки в поле тяготения (центральном ньютоновском

поле) другой материальной точки. Соответствующее движение получило название *кеплеровского движения*. Но даже относительно малые силы с течением времени могут вызвать значительные отклонения в движения от первоначального кеплеровского. Поэтому весьма значительную часть небесной механики составляет изучение движения, которое происходит под действием центральной ньютоновской силы и дополнительных сил, малых по сравнению с ней. Такое движение называется *возмущенным*, потому что теми или иными методами теории возмущений исследуется отличие этого движения от *невозмущенного* кеплеровского. При этом используется прежде всего метод вариации произвольных постоянных, который в астрономии получил название *метода оскулирующих орбит*. Используются также метод малого параметра и другие приближенные аналитические методы. Ввиду неинтегрируемости уравнений небесной механики в конечном виде в ней широко используются качественные методы изучения свойств движений небесных тел, их устойчивости, периодичности, финитности.

Богатый теоретическими результатами и практическими применениями раздел небесной механики составляет *задача трех тел*. В последнее время возрастание точности измерения времени, а значит, и расстояний радиотехническими средствами с одной стороны и потребности космонавтики с другой, делают необходимым учет эффектов общей теории относительности, и тем самым побуждают к развитию *релятивистской небесной механики*. Еще в домашнее время, а тем более в эпоху ЭВМ, в небесной механике, особенно при рассмотрении движения конкретных тел, широко применяются различные *численные методы* решения дифференциальных уравнений, а некоторые из них и возникли благодаря проблемам небесной механики [8]. Развивается также применение вычислительной техники для выполнения аналитических действий в небесной механике [20].

Теоретические и прикладные проблемы движения искусственных небесных тел (ИНТ) образуют новый раздел небесной механики – *астродинамику* (или космодинамику). Вместе с тем астrodинамика является одновременно важной частью теоретической космонавтики как комплексной научно-технической дисциплины. Хотя физические основы движения естественных и искусственных небесных тел одинаковы, в постановке задач астrodинамики есть много специфического: так иначе ставится задача определения орбит, есть необходимость решения задач в реальном масштабе времени, есть задача поиска оптимальных траекторий.

Наряду с термином “небесная механика” существует термин “теоретическая астрономия”, который возник еще в конце XVII века. Соотношение между ними не имеет однозначного толкования. Московская школа небесной механики (Н. Д. Моисеев, Г. Н. Дубошин и др.) к теоретической астрономии относит лишь прикладные задачи вычисления эфемерид и определения орбит. Ленинградская же школа (М. Ф. Субботин и др.) включает в теоретическую астрономию все теоретические и прикладные

вопросы движения небесных тел, то-есть понятие “теоретическая астрономия” трактуется ею как более широкое, нежели термин “небесная механика”.

Из выше сделанного краткого обзора содержания небесной механики вытекает примерно такой план курса “Небесная механика” для студентов специальности “Астрономия”:

1. гравитационные поля небесных тел;
2. уравнения задачи многих тел и их первые интегралы;
3. уравнения задачи двух тел и их решение;
4. исследование кеплеровского движения;
5. ряды эллиптического движения;
6. вычисление эфемерид;
7. определение орбит;
8. основы теории возмущенного движения;
9. устойчивость движения в небесной механике;
10. задача трех тел;
11. элементы релятивистской небесной механики.

Темы 5 и 6 обычно являются предметом практических занятий или спецпрактикума по небесной механике и подробно в этом учебнике не рассматриваются. Приведены лишь постановки задач и идеи их решения, а также алгоритмы их решения даны в Приложениях 2 и 3. Исчерпывающее соответствующий материал изложен в книге М. Ф. Субботина [39]. Темы 3 и 4 во второй главе изложены независимо от материала главы I, где рассматриваются темы 1 и 2, с тем, чтобы при желании можно было начать изучение курса с темы 3 и для того, чтобы иметь возможность раньше начать изучение тем 5 и 6 на практических занятиях. Основам теории возмущенного движения посвящена глава IV (темы 8 та 9). В главе V рассмотрено движение спутника планеты как иллюстрация общих методов теории возмущенного движения. Этот материал не является необходимым в основном курсе небесной механики, но он может войти в спецкурсы “Астродинамика” или “Основы космонавтики”. Глава VI содержит основные результаты, относящиеся к задаче трех тел (тема 10). Материал главы VII также выходит за рамки основного курса небесной механики. В ней сделан весьма сжатый обзор основных численных и аналитических методов, которые применялись и применяются при построении теорий движения отдельных тел Солнечной системы. Несколько подробнее, но тоже конспективно рассмотрены проблема разложения возмущающей функции в ряды и связанное с этим понятие о собственных элементах орбиты, а также основы теории движения Луны.

Задачи, приведенные в конце каждой главы, имеют в основном теоретический характер. Они дополняют основной материал учебника и могут быть использованы при проведении практических и семинарских занятий, выполнении курсовых работ. Достаточное количество задач вычислительного характера можно найти в сборнике задач [5]. Учебник

может быть полезен также студентам специальности “Механика” и других специальностей, где так или иначе приходится сталкиваться с вопросами движения естественных и искусственных небесных тел, студентам-физикам педагогического профиля при углубленном изучении ими астрономии.

Основными учебниками по небесной механике были ранее книги Г. Н. Дубошина [17] и М. Ф. Субботина [39]. Однако их недостатком является практически полное игнорирование векторного аппарата, что в известной мере определяет большой объем этих книг. Более кратким вступлением в небесную механику могут быть первые главы книги [31]. Рассмотрение других задач небесной механики, кроме задач двух и многих тел и основ теории возмущенного движения, имеется в книге Г. Н. Дубошина [18]. Основы небесной механики и сопредельных разделов астрономии содержит труд Д. Брауера и Дж. Клеменса [10]. Математический аппарат небесной механики рассмотрен В. И. Арнольдом [4] и А. Уинтнером [41]. Достаточно полную информацию по вопросам астродинамики можно найти в трехтомном труде С. Херрика [40]. Ссылки на дополнительную литературу по отдельным вопросам небесной механики будут сделаны в соответствующих местах учебника.

Вопросы, которые входят в основной курс небесной механики, обязательный для каждого астронома-профессионала, рассматриваются достаточно подробно. Но чтобы дать более полное представление о содержании современной небесной механики, автор счел нужным коснуться и ряда вопросов, выходящих за указанные границы. Такие вопросы рассматриваются лишь на уровне постановки задачи и изложения основных результатов. Это относится к задачам определения орбит ИНТ и компонентов в двойных звездных системах (гл. III), нелинейных методов исследования устойчивости движения в небесной механике (гл. IV). Дополнительной является и глава VII, в которой сделан сжатый обзор методов построения теорий движения отдельных тел Солнечной системы. При этом указывается литература, с помощью которой студенты соответствующей специализации могут подробнее изучить эти проблемы.

И в заключение приведем высказывание А. Пуанкаре, который был не только выдающимся математиком, но внес вклад в небесную механику, физику и философию науки, из его книги “Ценность науки”[34]:

“Правительства и парламенты должны считать астрономию одной из самых дорогих наук: самый малый инструмент стоит сотни тысяч франков, самая небольшая обсерватория – миллионы, каждое затмение влечет за собой дополнительные кредиты. И все это ради светил, которые так далеки, которые совершенно чужды нашим избирательным распрям...

Можно было бы, конечно, рассказать им о морском деле, важность которого признается всеми и для которого необходима астрономия. Но это значило бы обращать внимание на менее важную сторону вопроса.

Астрономия полезна, потому что она возвышает нас над нами самими; она полезна, потому что она величественна; она полезна, потому что она

прекрасна, – вот что надо говорить. Именно она являет нам, как ничтожен человек телом и как велик он духом, ибо ум его в состоянии обять сияющие бездны, где тело его является лишь темной точкой, в состоянии наслаждаться их безмолвной гармонией. Так приходим мы к осознанию своей мудрости. Здесь никакая цена не может быть слишком дорогой, потому что это осознание делает нас сильнее.”

И далее он отмечает (имея в виду И. Кеплера и открытые им законы планетных движений), что это именно “астрономия открыла нам существование законов природы.”

Лучше, наверное, об огромном мировоззренческом значении астрономии, о ее почетном месте в духовной жизни человечества и не скажешь. Хотя все же не стоит противопоставлять эту общекультурную роль астрономии ее прикладному значению. Решение важнейшей задачи ориентации в пространстве и времени – это то, что стимулирует развитие астрономии с тех пор, как первобытный человек направил свой взгляд в небо, и до нашей космической эпохи, когда создаются спутниковые навигационные системы. И в решении обеих задач (мировоззренческой и прикладной), которые стоят перед астрономией, наука с гордым именем “небесная механика” занимает свое достойное место.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить рецензентов учебника проф. О. А. Железняка и доц. А. А. Базея и научного редактора проф. Д. А. Андриенко за полезные замечания и советы. Благодарен он Т. П. Филипповой за помощь в подготовке рисунков и сотрудникам издательского отделу НМЦ Харьковского университета за их большую работу по подготовке оригинала-макета учебника.

Глава I. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Основной силой, которая определяет движение небесных тел, является гравитация. Для того, чтобы корректно сформулировать задачу о движении этих тел и выяснить пределы применимости того или другого приближения, необходимо сначала рассмотреть способы описания гравитационных полей небесных тел.

1.1. Гравитационные поля небесных тел

1.1.1. Гравитационное поле произвольного тела. Пусть мы имеем тело T с плотностью $\rho(\vec{r}')$ и массой M , положение которого в пространстве задано в системе координат x, y, z (рис. 1.1). Так как сила притяжения зависит только от координат тяготеющих тел, то есть является потенциальной, то будем искать *гравитационный потенциал* тела T , имея в виду, что потенциал V определяется соотношением: сила $\vec{F} = \text{grad}V$, (тогда потенциальная энергия $U = -V$). Элемент тела с массой dm' в объеме dv' создает в точке P с радиусом-вектором \vec{r} потенциал

$$dV = f \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1)$$

где f – гравитационная постоянная.*

Прежде чем для получения потенциала всего тела проинтегрировать (1.1) по объему тела T , преобразуем знаменатель выражения (1.1) с помощью теоремы косинусов:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos\psi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}. \quad (1.2)$$

Правая часть (1.2) является *производящей функцией* полиномов Лежандра от аргумента $\cos\psi$, где ψ – угол между радиусами-векторами \vec{r} и \vec{r}' . Это означает, что выражение (1.2) может быть представлено в виде ряда по степеням отношения r'/r , коэффициентами которого будут полиномы Лежандра $P_n(\cos\psi)$, то есть

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\psi) \left(\frac{r'}{r}\right)^n. \quad (1.3)$$

Если теперь перейти к сферическим координатам r, θ, λ (см. рис. 1.1), то для разделения переменных в коэффициентах ряда (1.3) можно воспользоваться *теоремой сложения сферических функций*. Напомним, что эта теорема имеет вид (если ввести обозначение $t = \cos\theta$):

$$P_n(\cos\psi) = P_n(t)P_n(t') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t)P_n^m(t') \cos m(\lambda - \lambda'), \quad (1.4)$$

где *полиномы Лежандра*

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad (1.5)$$

*Такое непривычное для физики обозначение гравитационной постоянной ввел в небесную механику Ф. Гаусс и оно нередко употребляется в ней.

а присоединенные функции Лежандра

$$P_n^m(t) = (-1)^m (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m}(P_n(t)). \quad (1.6)$$

Из выражения (1.5) вытекает, что $P_1(t) = t$. Поэтому нетрудно убедиться в том, что при $n=1$ формула (1.4) дает формулу косинусов сферической тригонометрии, поэтому теорему сложения можно рассматривать как некоторое обобщение этой формулы.

Подставляя теперь (1.4) в (1.3), а (1.3) в (1.1), получим после интегрирования потенциал всего тела:

$$\begin{aligned} V = & \frac{f}{r} \left[P_n(t) \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n(t') \left(\frac{r'}{r} \right)^n dv' + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t) \cos m\lambda \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \cos m\lambda' \left(\frac{r'}{r} \right)^{n'} dv' + \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t) \sin m\lambda \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \sin m\lambda' \left(\frac{r'}{r} \right)^{n'} dv' \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Умножив и разделив почленно ряд (1.7) на величины $a^n M$, где a – характерный линейный размер нашего тела (экваториальный радиус звезды или планеты), введем такие обозначения для безразмерных коэффициентов :

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{a^n M} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n(t') r'^n dv', \\ C_n^m &= \frac{2}{a^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \cos m\lambda' dv', \\ S_n^m &= \frac{2}{a^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \sin m\lambda' dv'. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Теперь гравитационный потенциал тела в окружающем его пространстве

$$\begin{aligned} V = & \frac{f}{r} \left[P_n(t) \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n(t') \left(\frac{r'}{r} \right)^n dv' + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t) \cos m\lambda \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \cos m\lambda' \left(\frac{r'}{r} \right)^{n'} dv' + \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t) \sin m\lambda \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \sin m\lambda' \left(\frac{r'}{r} \right)^{n'} dv' \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким образом, мы получили разложение гравитационного потенциала произвольного тела по *шаровым функциям* координат точки $P(\vec{r})$, то есть в ряды по степеням расстояния r , функциям Лежандра по полярному расстоянию θ и в ряд Фурье по долготе λ . Заметим, что этот же результат можно было получить, исходя из того, что гравитационный потенциал в свободном пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа, а шаровые функции как раз являются собственными функциями оператора Лапласа.

Коэффициенты ряда (1.9) – это мультипольные моменты плотности тела. Коэффициенты J_n , которые определяют члены ряда, не зависящие от долготы λ и обращающиеся в 0 только на параллелях, называются *зональными*. Коэффициенты C_n^m и S_n^m определяют гармоники, которые не зависят от полярного расстояния θ и обращаются в 0 только на меридианах. Они называются *секториальными*. Наконец, коэффициенты C_n^m и S_n^m при $m < n$ обращаются в 0 на криволинейных трапециях, которые образованы дугами соответствующих параллелей и меридианов (или тессерах), поэтому они называются *тессеральными* коэффициентами. Выясним физический смысл первых коэффициентов ряда (1.9). Учитывая известные формулы перехода от сферических координат к прямоугольным, получим, что при $n=1$:

$$J_1 = \frac{z_c}{a}, \quad C_1^1 = \frac{x_c}{a}, \quad S_1^1 = \frac{y_c}{a}, \quad (1.10)$$

где x_c , y_c и z_c – координаты центра масс тела T . Таким образом, коэффициенты ряда при $n=1$ равны безразмерным координатам центра масс тела и могут быть обращены в 0, если совместить начало координатной системы с центром масс тела, гравитационный потенциал которого мы ищем. Прежде чем перейти к случаю $n=2$, напомним, что моменты второго порядка от плотности тела образуют *тензор инерции* этого тела

$$I = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

где *осевые моменты инерции*

$$\begin{aligned} A &= \int_{(T)} \rho(\vec{r}') (y'^2 + z'^2) dv', \\ B &= \int_{(T)} \rho(\vec{r}') (x'^2 + z'^2) dv', \\ C &= \int_{(T)} \rho(\vec{r}') (x'^2 + y'^2) dv' \end{aligned} \quad (1.12)$$

и *центробежные моменты инерции*

$$\begin{aligned} D &= - \int_{(T)} \rho(\vec{r}') x' y' dv', \\ E &= - \int_{(T)} \rho(\vec{r}') x' y' dv', \\ F &= - \int_{(T)} \rho(\vec{r}') y' z' dv'. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Используя формулы (1.12) и (1.13) и снова-таки формулы, связывающие прямоугольные и сферические координаты, после некоторых преобразований получим, что

$$J_2 = \frac{A + B - 2C}{2a^2 M}, \quad C_2^1 = \frac{E}{a^2 M}, \quad C_2^2 = \frac{B - A}{4a^2 M}, \quad S_2^1 = \frac{F}{a^2 M}, \quad S_2^2 = \frac{D}{2a^2 M}. \quad (1.14)$$

Вспомним наконец, что всегда можно выбрать такие направления координатных осей (такие оси называются *главными осями инерции* данного тела), относительно которых тензор инерции приобретает диагональный вид. При этом обращаются в 0 коэффициенты C_2^1 , S_2^1 и S_2^2 .

1.1.2. Гравитационные поля звезд и планет. Рассмотрим некоторые частные случаи распределения плотности в гравитирующем теле.

1. Пусть распределение масс подчиняется сферической симметрии, то есть $\rho(\vec{r}') = \rho(r')$. Тогда в силу ортогональности функций Лежандра и тригонометрических функций все коэффициенты ряда (1.9) равняются 0, кроме $J_0 = 1$, и потенциал

$$V = \frac{fM}{r}, \quad (1.15)$$

то есть в этом случае гравитационное поле тела совпадает с полем точечной массы M , находящейся в центре масс тела. Этот факт был известен еще И. Ньютона, хотя доказывал он его иначе.

2. Такой же результат можно получить, если рассматривать гравитационное поле на достаточно большом удалении от нашего тела, при значениях r , настолько больших в сравнении с размером тела a , чтобы можно было пренебречь членами порядка $(a/r)^2$ и выше.

3. Тело имеет осевую симметрию, то есть $\rho(\vec{r}') = \rho(r', \theta')$. В этом случае будут отсутствовать все секториальные и тессеральные гармоники, так как все коэффициенты $C_n^m = S_n^m = 0$, и гравитационный потенциал будет иметь только зональные гармоники:

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n P_n(t) \left(\frac{a}{r} \right)^n \right]. \quad (1.16)$$

4. Если также существует и симметрия относительно экваториальной плоскости, иначе говоря, плотность – четная функция широты $\varphi = \pi/2 - \theta$, то обращаются в 0 все нечетные зональные гармоники, и потенциал можно записать в таком виде:

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} P_{2n}(t) \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \right]. \quad (1.17)$$

Пункт 2 подводит количественную основу под утверждение о том, что небесные тела можно рассматривать как материальные точки благодаря большим расстояниям между ними, и позволяет дать оценку точности этого приближения в каждом конкретном случае. Одиночные звезды поздних спектральных классов (Солнце, в частности), скорость осевого вращения которых невелика, достаточно хорошо удовлетворяют условию пункта 1. Газовые и жидкые тела (быстро вращающиеся звезды ранних спектральных классов, компоненты тесных двойных систем, планеты-гиганты) удовлетворяют условиям пунктов 3 и 4. Твердотельные планеты земного типа и большие спутники планет также удовлетворяют этим условиям, но с меньшей точностью. Характеристики гравитационных полей тел Солнечной

системы приведены в табл. 1.1. Из нее видно, что выполняются следующие неравенства:

$$J_2 \ll 1, J_{n>2}, C_n^m, S_n^m \ll J_2. \quad (1.18)$$

Таким образом, на межпланетных расстояниях Солнце и планеты с большой степенью точности можно считать материальными точками, а в околопланетном пространстве неплохим первым приближением для гравитационного потенциала планет может быть выражение:

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 + J_2 \frac{3\cos^2 \theta - 1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]. \quad (1.19)$$

Нужно, однако, иметь в виду, что достаточность того или иного приближения для гравитационного потенциала зависит не только от относительных ошибок, которые дает это приближение, но и от промежутка времени, на котором рассматривается движение в этом поле, поскольку малые величины, накапляясь, могут привести к значительным отклонениям в от движения в поле с более точным описанием потенциала. Значения коэффициентов, которые описывают гравитационные поля планет и Луны, точнее, нежели приведенные в табл. 1.1, можно найти в справочнике [38].

Таблица 1.1

Гравитационные поля тел Солнечной системы

Объект	$fM, \text{cm}^3/\text{c}^2$	$J_n \cdot 10^6$				
		$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
Солнце	$1.33 \cdot 10^{26}$	<10	-	-	-	-
Меркурий	$2.17 \cdot 10^{19}$	~ -100	-	-	-	-
Венера	$3.25 \cdot 10^{20}$	~ -4	-	-	-	-
Земля	$3.99 \cdot 10^{20}$	-1083	2.54	1.58	0.22	0.59
Марс	$4.30 \cdot 10^{19}$	-1959	30	-10	-6	-3
Юпитер	$1.27 \cdot 10^{23}$	-14733	-	-587	-	5
Сатурн	$3.79 \cdot 10^{22}$	-16479	-	-937	-	11
Уран	$5.80 \cdot 10^{21}$	-3352	-	-29	-	-
Нептун	$7.05 \cdot 10^{21}$	-3411	-	-50	-	-
Луна	$4.90 \cdot 10^{18}$	-206	-37	33	-5	-

Иногда (в частности, при описании гравитационных аномалий) более удобным является представление гравитационного поля небесных тел как поля *гравитационного мультиполя*, то есть совокупности материальных точек определенной массы и определенным образом расположенных. Тогда потенциал

$$V = f \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|}, \quad (1.20)$$

(см. подробнее об этом в [3]). Заметим лишь, что уравнения движения в поле *гравитационного диполя* с потенциалом

$$V = f \left(\frac{m_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{m_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right) \quad (1.21)$$

интегрируются в конечном виде. Развиваются и другие подходы к описанию гравитационных полей, например, совокупностью дисков различных радиусов.

1.2. Задача многих тел в инерциальной системе координат

Переходя к рассмотрению отдельных задач небесной механики, нужно четко понимать, что в классической механике все возможные системы координат подразделяются на два класса – *инерциальные*, в которых выполняются законы динамики Ньютона, и *неинерциальные*. В неинерциальных системах справедливы уравнения относительного движения, суть которых можно выразить следующим образом: к силам, которые действуют на данное тело со стороны других тел, нужно добавить силу инерции, которая в случае невращающихся систем равна произведению массы данного тела на ускорение начала системы координат, взятому с противоположным знаком. Само понятие силы инерции не является таким уж простым, это не сила в понимании меры взаимодействия материальных объектов, но нам достаточно будет использовать его лишь как удобный способ записи уравнений движения в неинерциальных системах координат.

Системы координат, которые могут быть реализованы при решении конкретных астрономических задач, связаны с определенными небесными телами. Для того, чтобы такая система была инерциальной, нужно, чтобы эти тела не взаимодействовали с другими материальными объектами. Строго говоря, это невозможно. И потому можно говорить лишь о степени инерциальности или неинерциальности той или другой системы координат. В целом в астрономии задача построения системы координат, наиболее близкой к инерциальной, решается фундаментальной астрометрией. Мы в дальнейшем будем или пользоваться системами координат, инерциальными по определению, или уточнять степень их инерциальности.

1.2.1. Уравнения задачи многих тел в инерциальной системе координат. Начнем с уточнения постановки этой задачи. Пусть дана система из $n+1$ материальных точек M_0, M_1, \dots, M_n массами m_0, m_1, \dots, m_n . Нужно найти их радиусы-векторы как функции времени, если на каждую точку действуют только силы всемирного тяготения со стороны других точек системы. В инерциальной системе координат X, Y, Z положение точки M_i определяется ее радиусом-вектором \vec{R}_i (рис. 1.2). Тогда уравнение ее движения задается вторым законом Ньютона и имеет такой вид:

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i = fm_i \sum_{j=0}^n \frac{m_j (\vec{R}_j - \vec{R}_i)}{|\vec{R}_j - \vec{R}_i|^3}, \quad j \neq i. \quad (1.22)$$

Вектор в числителе правой части (1.22) определяет направление силы, с которой точка M_j притягивает точку M_i , а куб расстояния $M_j M_i$ в знаменателе обеспечивает обратно-квадратичную зависимость силы от этого

расстояния. Если же индекс i пробегает значения от 0 до n , то (1.22) дает систему из $n+1$ векторных дифференциальных уравнений или $3(n+1)$ скалярных. Каждое уравнение имеет второй порядок, то есть порядок всей системы уравнений (1.22) равен $6(n+1)$. В частности, система уравнений, описывающая движение Солнца и девяти больших планет, имеет 60-й порядок.

Если мы сможем найти общее решение системы дифференциальных уравнений (1.22), то оно должно содержать соответствующее количество произвольных постоянных, в общем случае $6(n+1)$. Для их определения нужно иметь начальные условия (*задача Коши*):

$$\vec{R}_i^{(0)} = \vec{R}_i(t_0), \quad \dot{\vec{R}}_i^{(0)} = \dot{\vec{R}}_i(t_0), \quad (1.23)$$

то есть значения радиусов-векторов и векторов скорости всех точек системы в начальный момент времени t_0 , или значения радиусов-векторов в два момента времени t_1 и t_2 (*краевая задача*):

$$\vec{R}_i^{(1)} = \vec{R}_i(t_1), \quad \vec{R}_i^{(2)} = \vec{R}_i(t_2). \quad (1.24)$$

С первой задачей мы сталкиваемся, например, при выведении на орбиту искусственного объекта (ИСЗ или АМС), а со второй – при определении орбиты небесного тела по данным его позиционных наблюдений.

Система уравнений (1.22) нелинейна и в случаях $n > 1$ не интегрируется в конечном виде. Но по постановке задачи рассматриваемая система материальных точек является замкнутой, поэтому для нее должны выполняться соответствующие законы сохранения. Последние с математической точки зрения имеют вид функций $\Psi(\vec{R}_i, \dot{\vec{R}}_i, t)$, которые обращаются в постоянные, если функции $\vec{R}_i(t)$ и $\dot{\vec{R}}_i(t)$ удовлетворяют уравнениям движения. Эти функции $\Psi(\vec{R}_i, \dot{\vec{R}}_i, t)$ не содержат старшей производной и поэтому называются *первыми интегралами* системы дифференциальных уравнений (1.22). Они несут определенную информацию о движении материальных точек нашей системы. В частности, каждый первый интеграл позволяет понизить порядок системы на одну единицу, а нахождение независимых первых интегралов в количестве, равном порядку системы уравнений, эквивалентно ее интегрированию. Из соображений, о которых будет сказано позже, целесообразно получить первые интегралы задачи многих тел непосредственно, не ссылаясь на общие теоремы механики, воспользовавшись для этого понятием силовой функции рассматриваемой задачи.

Но перед этим сделаем два замечания. Первое замечание касается того, что каждое из уравнений (1.22) можно сократить на отличную от 0 массу m_i . Однако это тривиальное с точки зрения алгебры обстоятельство – равенство (при определенном выборе значения гравитационной постоянной) меры инерции и меры гравитационных свойств для всех материальных объектов имеет глубокий физический смысл. В классической физике – это экспериментальный факт, установленный с весьма большой точностью. А

фундаментальное значение этого факта, связанное с его всеобщностью, привело А. Эйнштейна к созданию общей теории относительности. Второе замечание – терминологическое. Рассматриваемая задача называется задачей многих тел, а речь в ней идет о движении материальных точек. Такая известная некорректность терминологии, закрепленная традицией, как раз и свидетельствует о том, что основы небесной механики закладывались весьма давно, еще до того, как сформировались современные строгие требования к используемой терминологии. Так, вместо выражения „движение в инерциальной системе координат“ и сейчас иногда употребляется выражение “движение в абсолютных осях”, а движение в неинерциальной системе координат называется “относительным движением”, хотя любое движение является относительным. Эти выражения напоминают нам о понятиях абсолютного пространства и абсолютного времени Ньютона, положительное содержание которых является эквивалентом утверждения о существовании инерциальных систем отсчета.

1.2.2. Силовая функция задачи многих тел. Назовем *силовой функцией* системы такую функцию U координат всех точек системы, когда правая часть i -того из уравнений (1.22) является градиентом этой функции, рассматриваемой как функция координат i -той точки, что записывать будем таким образом: $\text{grad}_i U$. Непосредственным вычислением можно проверить, что силовая функция задачи многих тел равна

$$U = \frac{f}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad j \neq i, \quad (1.25)$$

где $\Delta_{ij} = |\vec{R}_j - \vec{R}_i|$. Множитель $1/2$ появляется в силу симметрии выражения (1.25) относительно индексов i и j . Теперь систему уравнений (1.22) можно записать более компактно:

$$\ddot{m}_i \ddot{\vec{R}} = \text{grad}_i U, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.26)$$

Видно, что силовая функция U положительна, если все точки системы находятся на конечных и отличных от 0 расстояниях одна от другой, и стремится к 0 только тогда, когда все точки системы удаляются на бесконечность.

Установим некоторые свойства силовой функции (1.25), воспользовавшись произвольностью в выборе системы координат (в пределах ее инерциальности). При этом важно то, что эта произвольность связана с фундаментальными свойствами пространства и времени – с однородностью и изотропностью пространства и однородностью времени.

Однородность пространства означает, что начало системы координат можно разместить в любой точке пространства. Перенесем начало координат системы в точку, которая определяется бесконечно малым радиусом-вектором $d\vec{R}$. При этом радиусы-векторы всех точек систем изменятся на величину $-d\vec{R}$. Соответствующее изменение силовой функции по правилу дифференцирования функций многих переменных равно

$$dU = -\sum_{i=0}^n \text{grad}_i U \cdot d\vec{R}. \quad (1.27)$$

Но расстояния Δ_{ij} при этом не изменяются, а значит, и функция U не изменит своего значения, то есть величина $dU=0$. В силу произвольности множителя $d\vec{R}$ должно иметь место равенство

$$\sum_{i=0}^n \text{grad}_i U = 0. \quad (1.28)$$

Очевидно, что равенство (1.28) можно также рассматривать как следствие третьего закона Ньютона.

Изотропность пространства означает равноправие всех направлений и возможность произвольно выбирать направления координатных осей. Вследствие этого будет равняться нулю и изменение силовой функции, если мы сделаем бесконечно малый поворот системы координат, который мы определим вектором поворота $d\vec{\phi}$. Направление этого вектора даст нам ось поворота, а его величина – угол поворота вокруг этой оси. Воспользовавшись равенствами $\dot{\vec{R}}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i$ и $\vec{\omega} = d\vec{\phi} / dt$, получим, что $d\vec{R}_i = d\vec{\phi} \times \vec{R}_i$. В соответствии с этим,

$$dU = \sum_{i=0}^n \text{grad}_i U \cdot d\vec{\phi} \times \vec{R}_i = 0. \quad (1.29)$$

Изменив в смешанном векторном произведении порядок скалярного и векторного произведений, получим в силу произвольности вектора поворота, что

$$\sum_{i=0}^n \text{grad}_i U \times \vec{R}_i = 0, \quad (1.30)$$

то-есть сумма моментов сил замкнутой системы равняется 0.

Наконец, *однородность времени* позволяет произвольно выбирать момент начала его отсчета. Если изменить этот момент на величину dt , то изменение силовой функции с учетом правила дифференцирования неявно заданной функции будет равняться

$$dU = \sum_{i=0}^n \text{grad}_i U \cdot \vec{R}_i \cdot dt. \quad (1.31)$$

Теперь используем найденные свойства силовой функции для получения первых интегралов задачи многих тел.

1.2.3. Первые интегралы задачи многих тел. Просуммируем уравнения (1.26) по индексу i от 0 до n . В силу условия (1.28) будем иметь, что

$$\sum_{i=0}^n m_i \ddot{\vec{R}}_i = 0. \quad (1.32)$$

Интегрируя (1.32) последовательно два раза, получим, что

$$\sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{R}}_i = \vec{a}, \quad \sum_{i=0}^n m_i \vec{R}_i = \vec{at} + \vec{b}, \quad (1.33)$$

где \vec{a} и \vec{b} – векторные произвольные постоянные интегрирования. Если ввести обозначение

$$m = \sum_{i=0}^n m_i \quad (1.34)$$

и вспомнить, что радиус-вектор

$$\vec{R}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i \vec{R}_i \quad (1.35)$$

определяет положение *центра масс* (центра инерции) нашей системы материальных точек, то первые интегралы (1.33) приобретут такой вид:

$$\dot{\vec{R}}_C = \frac{\vec{a}}{m}, \quad \vec{R}_C = \frac{\vec{a}}{m} t + \frac{\vec{b}}{m}, \quad (1.36)$$

который выявляет их физический смысл – центр масс системы движется равномерно и прямолинейно. Поэтому сами эти первые интегралы носят название *интегралов центра масс*. Отсюда также следует, что, если разместить в центре масс начало системы координат, то такая *барицентрическая* система координат будет инерциальной.

Для того, чтобы использовать равенство (1.30), умножим каждое из уравнений (1.26) на радиус-вектор \vec{R}_i векторно слева и просуммируем эти произведения по i от 0 до n . Получим:

$$\sum_{i=0}^n m_i \vec{R}_i \times \ddot{\vec{R}} = 0. \quad (1.37)$$

Прибавив к (1.37) очевидное равенство

$$\sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}} = 0, \quad (1.38)$$

получим, что

$$\sum_{i=0}^n m_i (\vec{R}_i \times \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}}) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^n m_i \vec{R}_i \times \dot{\vec{R}} \right) = 0, \quad (1.39)$$

откуда, интегрируя, находим, что

$$\sum_{i=0}^n m_i \vec{R}_i \times \dot{\vec{R}}_i = \vec{c}. \quad (1.40)$$

Так как величина $m_i \dot{\vec{R}}_i$ – это *импульс* i -той точки, каждое слагаемое в (1.40) равно *моменту импульса* (кинетическому моменту) этой точки, а постоянная интегрирования \vec{c} – это не что иное, как кинетический момент всей нашей системы материальных точек. В соответствии с этим, первый интеграл (1.40) называется *интегралом моментов*.

Наконец, умножая i -тое уравнение (1.26) на вектор скорости $\dot{\vec{R}}_i$ скалярно, получим после суммирования всех уравнений и использования соотношения (1.31):

$$\sum_{i=0}^n m_i \ddot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} = \sum_{i=0}^n grad_i U \cdot \dot{\vec{R}}. \quad (1.41)$$

Обозначая модуль вектора скорости через V_i , можно переписать (1.41) в таком виде:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^n m_i V_i^2 \right) = \frac{dU}{dt}, \quad (1.42)$$

что дает:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i V_i^2 = U + h . \quad (1.43)$$

Слева в равенстве (1.43) стоит выражение для кинетической энергии нашей системы T , и первому интегралу (1.43) можно придать вид:

$$T - U = h , \quad (1.44)$$

который подчеркивает его физический смысл как закона сохранения энергии, и определяет его название – *интеграл энергии*, а также уточняет физический смысл силовой функции – это потенциальная энергия системы с противоположным знаком.

Из найденных четырех первых интегралов три имеют векторный характер, один – скалярный. Таким образом, мы нашли всего десять так называемых *классических первых интегралов* задачи многих тел. Своим существованием эти интегралы, как и соответствующие свойства силовой функции, обязаны определенным свойствам пространства и времени – однородности и изотропности пространства и однородности времени. Таким образом, выяснив из наблюдений, что движение небесных тел, в том числе и самых отдаленных, удовлетворяет в модели задачи многих тел этим законам, мы тем самым устанавливаем наличие указанных фундаментальных свойств пространства и времени в разных областях Вселенной.

Возникает вопрос о существовании в задаче многих тел еще других интегралов, кроме десяти классических. В конце XIX века усилиями ряда математиков и механиков был получен практически отрицательный ответ на этот вопрос – доказано, что не существует первых интегралов более-менее простой математической природы, а именно – первых интегралов, которые были бы однозначными аналитическими функциями координат, скоростей и времени.

Имеющиеся десять классических первых интегралов позволяют снизить порядок системы дифференциальных уравнений задачи на десять единиц. Еще на две единицы это позволяют сделать особенности правых частей уравнений (1.22), а именно – зависимость их только от разностей координат точек системы и независимость их от аргумента – времени t . Таким образом, можно понизить порядок системы на 12 единиц. Этого недостаточно для интегрирования даже задачи трех тел, имеющей 18-й порядок. Но как раз хватает для того, чтобы получить решение задачи двух тел.

Понизить порядок системы (1.22) можно разными способами. Кроме того, можно получить новые соотношения, которые имеют определенный физический смысл. Приведем два из них, вывод которых можно найти в [17]:

$$\ddot{I} = 2U + 4h , \quad (1.45)$$

где

$$I = \sum_{i=0}^n m_i R_i^2 \quad (1.46)$$

равняется моменту инерции системы относительно начала координат, и

$$\ddot{R} = 2U + 4h_C , \quad (1.47)$$

где величина

$$R = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j \Delta_{ij}^2, \quad h_C = h - \frac{a^2}{2m}. \quad (1.48)$$

Постоянная h_C – полная энергия системы относительно ее центра масс. Соотношение (1.47) известно как *равенство Лагранжа-Якоби*.

Возьмем центр масс системы – точку C и постоянный вектор момента \vec{c} . Это позволяет рассмотреть плоскость, проходящую через точку C и имеющую нормальный вектор \vec{c} . Эта плоскость, которая сохраняет постоянной свою ориентацию в пространстве и перемещается параллельно самой себе равномерно, носит название *неизменяемой плоскости Лапласа*. Ее можно использовать как основную плоскость системы координат в задаче многих тел.

1.2.4. Задача многих тел в барицентрической системе координат. Как уже указывалось, барицентрическая система координат является в случае задачи многих тел инерциальной. Поэтому, обозначив ее оси через ξ, η, ζ , а радиусы-векторы – через $\vec{\rho}_i$, на основе (1.22) запишем уравнения движения в этой системе координат:

$$m_i \ddot{\vec{\rho}}_i = f m_i \sum_{j=0}^n m_j \frac{\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i}{\Delta_{ij}^3}, \quad j \neq i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.49)$$

Но при этом барицентрические радиусы-векторы будут связаны между собою соотношением:

$$\sum_{j=0}^n m_j \vec{\rho}_j = 0, \quad (1.50)$$

которое позволяет исключить из уравнений (1.49) радиус-вектор какой-либо точки, например, точки M_0 . Будем иметь, что

$$\vec{\rho}_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j \vec{\rho}_j. \quad (1.51)$$

Подставляя (1.51) в (1.49) и выделяя в суммах по j нулевое и i -е слагаемые, получим такие уравнения движения в барицентрической системе координат:

$$\ddot{\vec{\rho}}_i + \mu_i \frac{\vec{\rho}_i}{\Delta_{i0}^3} = f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\vec{\rho}_0}{\Delta_{j0}^3} \right), \quad \mu_i = f(m_0 + m_i), \quad j \neq i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.52)$$

Исключая векторы $\vec{\rho}_0$ та $\dot{\vec{\rho}}_0$ в первых интегралах, увидим, что интегралы центра масс выполняются, как это и должно быть в барицентрической системе координат, тождественно, а интегралы моментов и энергии приобретают вид:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i + \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho} \times \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{\rho}}_i \right) = \vec{c} \quad (1.53)$$

и

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_i^2 + \frac{1}{2m} |m_i \dot{\vec{\rho}}_i|^2 = U + h.$$

И уравнения движения, и интегралы моментов энергии приобрели более громоздкий вид, однако порядок системы уравнений понизился на шесть единиц благодаря использованию интегралов центра масс.

1.3. Задача многих тел в относительной системе координат

Поскольку мы рассматриваем движение наших материальных точек, не принимая во внимание существование других материальных объектов, то неинерциальной системой координат может быть только система, связанная с одной из этих точек. Пусть это будет точка M_0 . Обозначим оси такой *относительной системы координат* через x , y , z , а радиусы-векторы остальных точек через \vec{r}_i , ($i = 1, 2, \dots, n$). Запишем уравнения движения этих точек, воспользовавшись правилом, сформулированным в начале пункта 1.2:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = f m_i \sum_{j=0}^n m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\Delta_{ij}^3} - f m_i \sum_{j=1}^n m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}, \quad j \neq i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.54)$$

Тут первая сумма – это сумма сил, действующих на i -ту точку со стороны остальных точек системы, вторая – сумма сил инерции, обусловленных ускорением точки M_0 – начала системы координат под действием всех других точек системы, включая i -ту точку. Выделяя в первой сумме слагаемое с $j=0$, а во второй – слагаемое с $j=i$, перепишем систему уравнений в таком виде:

$$\ddot{\vec{r}}_i + \mu_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right), \quad \mu_i = f(m_0 + m_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.55)$$

Вследствие того, что в конкретных задачах астрономии изучается именно относительное движение небесных тел, система дифференциальных уравнений (1.55) $6n$ -го порядка является одной из важнейших в небесной механике. Такая постановка задачи особенно целесообразна в тех случаях, когда масса точки M_0 значительно больше масс всех других точек системы, как это и имеет место в системе “Солнце – планеты” или “планета – ее спутники”. Поскольку масса m_0 входит в левые части уравнений (1.55) и не входит в их правые части, то абсолютная величина этих правых частей относительно мала в сравнении с левыми частями уравнений. Из этого следует, что движение каждой из точек малой массы M_i (по крайней мере на некотором отрезке времени) должно мало отличаться от движения в задаче двух тел – движения точки M_i относительно точки M_0 под действием только этой точки. А так как эта последняя задача интегрируется в конечном виде, то и относительное движение в этом случае задаче многих тел может быть приближенно изучено тем или иным методом теории возмущений. Поэтому движение в задаче двух тел будем называть *невозмущенным* (если из контекста не следует, что за невозмущенное движение берется движение в какой-либо другой задаче), а движение, которое описывается уравнением

$$\ddot{\vec{r}}_i + \mu_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = \vec{F}_i, \quad (1.56)$$

причем имеет место условие $F_i \ll \mu_i / r_i^2$, будем называть *возмущенным*. Возвращаясь к уравнениям задачи многих тел (1.55), введем *возмущающие* (или *пертурбационные*) функции

$$R_i = f \sum_{j=1}^n m_j R_{ij}, \quad j \neq i, \quad (1.57)$$

где

$$R_{ij} = \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\vec{r}_j \cdot \vec{r}_i}{r_j^3}, \quad j \neq i. \quad (1.58)$$

Теперь уравнения относительного движения приобретают такой вид:

$$\ddot{\vec{r}}_i + \mu_i \frac{\vec{r}_i}{r_i} = \text{grad}_i R_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.59)$$

Подчеркнем, что из неравенств $m_0 \gg m_i$ вытекает также то, что система координат, связанная с точкой M_0 , весьма близка к инерциальной, тогда как системы координат с началом в одной из точек M_i существенно неинерциальны. А именно в этом с физической точки зрения и состоит различие между гелиоцентрической и геоцентрической системами.

Переходя к рассмотрению первых интегралов задачи многих тел в относительном движении, нужно прежде всего отметить, что в неинерциальной системе координат не могут иметь место интегралы центра масс, ибо он движется с ускорением. Интегралы моментов и энергии можно получить, если вспомнить, что радиусы-векторы точек в барицентрической и относительной системах координат связаны соотношением $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i + \vec{\rho}_0$, которое с учетом (1.51) записывается таким образом:

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j \vec{\rho}_j. \quad (1.60)$$

Переходя в первых интегралах (1.53) от барицентрических к относительным координатам, получим интегралы моментов и энергии в относительной задаче многих тел:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r} \times \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}} = \vec{c} \quad (1.61)$$

и

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_i^2 - \frac{1}{2m} \left| \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \right|^2 = h. \quad (1.62)$$

Таким образом, в относительной задаче многих тел существуют лишь четыре классических первых интеграла.

Из выше сказанного вытекает та фундаментальная роль, которую играет в небесной механике задача двух тел. В следующей главе будет получено общее решение этой задачи и исследованы отдельные типы кеплеровского движения. В главе III будет рассмотрен ряд дополнительных вопросов теории движения в задаче двух тел и ее обобщениях, важных и интересных с той или иной точки зрения.

Задачи к главе I

1.1. Разложить в ряд по полиномам Лежандра гравитационный потенциал однородного диска с массой M и радиусом R .

1.2. Доказать, что гравитационный потенциал однородного эллипсоида с плотностью ρ и полуосами a, b, c равен

$$V = 2\pi abc\rho \int_{-\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{R(s)},$$

где

$$R(s) = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)},$$

а нижний предел $\lambda = 0$, если точка (x, y, z) лежит в середине эллипсоида, если же вне – то λ есть корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1.$$

1.3. Доказать, что гравитационный потенциал однородного эллипсоида вращения ($a = b > c$) равен

$$V = \frac{3fM}{2lc} \left[\operatorname{arctg}(lu) + \frac{x^2 + y^2}{l^2 c^2} \left(\frac{lu}{1 + l^2 u^2} - \operatorname{arctg}(lu) \right) + \frac{z^2}{l^2 c^2} (\operatorname{arctg}(lu) - lu) \right],$$

где $l = \sqrt{a^2 + b^2} / c$, M – масса эллипсоида, $u = 1$ для точек в середине эллипсоида и u есть корень уравнения

$$\frac{x^2 + y^2}{1 + l^2 u^2} + z^2 = \frac{c^2}{u^2}$$

для точек вне эллипсоида.

1.4. Доказать, что в задаче многих тел момент инерции относительно центра масс удовлетворяет равенствам $\ddot{I} = 2(T + h)$ и $\ddot{I} = 2(U + 2h)$.

1.5. Доказать неравенство Зундмана $c^2 \leq I(\ddot{I} - 2h)$, где c – постоянная интеграла моментов.

1.6. Пусть ρ_{\max} – наибольшее расстояние точек до центра масс системы, m_{\max} – наибольшая, m_{\min} – наименьшая из масс этих точек, m – сумма масс всех точек. Доказать, что в любой момент времени имеет место неравенство $m_{\min} \rho_{\max}^2 \leq I \leq m \rho_{\max}^2$.

1.7. Доказать теорему Вейерштрасса-Зундмана, которая состоит в том, что необходимым условием столкновения всех материальных точек, двигающихся в поле сил взаимного притяжения, в один и тот же момент времени является равенство нулю кинетического момента системы.

1.8. Доказать, что наибольшее расстояние между точками в системе гравитирующих материальных точек возрастает со временем:

а) не быстрее, нежели линейно, если наименьшее расстояние между ними все время превышает некоторую величину $\Delta > 0$;

б) не медленнее, нежели линейно, если полная энергия системы положительна.

1.9. Пусть $\vec{R}_i = \vec{R}_i(t)$ – решение задачи многих тел. Доказать, что $\vec{R}'_i = D\vec{R}_i(D^{3/2}t)$ также является решением этой задачи.

1.10. Записать уравнения относительного движения в задаче многих тел:

а) в сферической системе координат;

б) в координатах Якоби, в которых движение i -й точки рассматривается относительно центра масс j -х точек, где $j = 0, 1, \dots, i-1$.

1.11. Доказать, что для материальных точек, притягивающих одна другую с силой, пропорциональной расстоянию между ними, орбиты всех точек относительно любой из них являются эллипсами с центрами в этой точке.

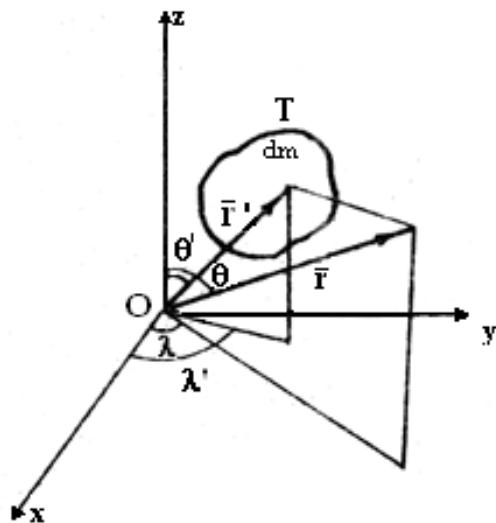


Рис. 1.1. Вычисление гравитационного потенциала произвольного тела

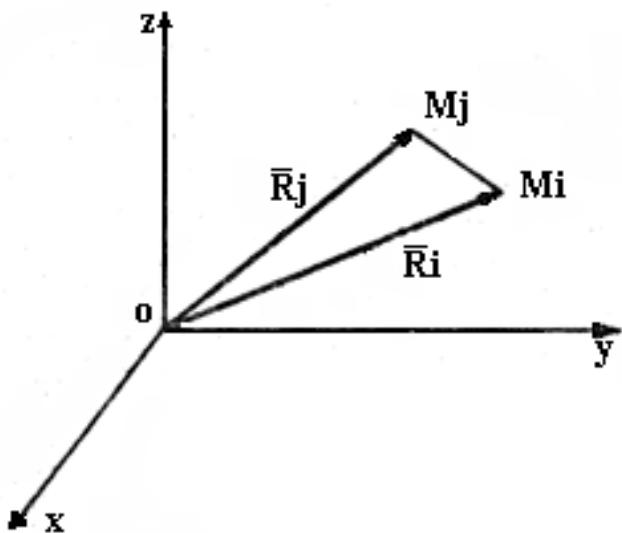


Рис 1.2. Задача нескольких тел в инерциальной системе координат

Глава II. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

2.1. Общее решение задачи двух тел

2.1.1. Уравнения задачи двух тел. Уравнения задачи двух тел можно конечно получить как частный случай уравнений задачи многих тел при $n=1$. Но мы не воспользуемся этим, чтобы сделать дальнейшее рассмотрение независимым от материала главы I. Начнем снова с рассмотрения движения в инерциальной системе координат X, Y, Z . Имеем материальные точки M_0 и M_1 с массами m_0 и m_1 и радиусами-векторами \vec{R}_0 и \vec{R}_1 (см. рис. 2.1). Второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения дадут такие *уравнения движения* этих точек:

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{\vec{R}}_0 &= fm_0m_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_0|^3}, \\ m_1 \ddot{\vec{R}}_1 &= fm_0m_1 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_0 - \vec{R}_1|^3}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где f – гравитационная постоянная.

Мы получили систему дифференциальных уравнений 12-го порядка, к которой нужно добавить *начальные условия*

$$\vec{R}_{0,1}^{(0)} = \vec{R}_{0,1}(t_0), \quad \dot{\vec{R}}_{0,1}^{(0)} = \dot{\vec{R}}_{0,1}(t_0) \quad (2.2)$$

или *краевые условия*

$$\vec{R}_{0,1}^{(1)} = \vec{R}_{0,1}(t_1), \quad \vec{R}_{0,1}^{(2)} = \vec{R}_{0,1}(t_2). \quad (2.3)$$

Наличие десяти классических интегралов, зависимость правых частей уравнений (2.1) только от разностей координат точек M_0 и M_1 и независимость их от времени t определяют принципиальную возможность интегрирования системы (2.1) в конечном виде. Но практически мы применяем задачу двух тел или в барицентрической системе координат (двойные звезды, движение системы “Земля–Луна” относительно Солнца и движение Земли и Луны относительно их барицентра), или, еще чаще, в относительной системе координат (то есть рассматриваем движение одной материальной точки относительно другой).

Чтобы перейти к барицентрической системе координат, вспомним, что в случае двух точек их центр масс лежит на отрезке M_0M_1 на расстояниях ρ_0 и ρ_1 , при этом $\rho_0 + \rho_1 = |M_0M_1|$, а $m_1\rho_0 = m_0\rho_1$, откуда вытекает (см. рис. 2.1), что

$$\vec{\rho}_0 = \frac{m_1}{m_0 + m_1} (\vec{R}_0 - \vec{R}_1), \quad \vec{\rho}_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} (\vec{R}_1 - \vec{R}_0). \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.1), получим, сокращая уравнения на m_0 и m_1 соответственно, такие *уравнения движения задачи двух тел в барицентрической системе координат*:

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{\rho}}_0 + \mu_0 \frac{\vec{\rho}_0}{\rho_0^3} &= 0, \\ \ddot{\bar{\rho}}_1 + \mu_1 \frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1^3} &= 0,\end{aligned}\tag{2.5}$$

где постоянные

$$\mu_0 = \frac{fm_1^3}{(m_0 + m_1)^2}, \quad \mu_1 = \frac{fm_0^3}{(m_0 + m_1)^2}.\tag{2.6}$$

Чтобы перейти к *уравнениям относительного движения*, введем радиус-вектор точки M_1 относительно точки M_0 как $\vec{r}_{1/0}$ и радиус-вектор точки M_0 относительно точки M_1 как $\vec{r}_{0/1}$. Тогда, вычитая первое уравнение (2.1) из второго и наоборот, будем иметь:

$$\ddot{\vec{r}}_{1/0} + \mu \frac{\vec{r}_{1/0}}{r_{1/0}^3} = 0\tag{2.7}$$

и

$$\ddot{\vec{r}}_{0/1} + \mu \frac{\vec{r}_{0/1}}{r_{0/1}^3} = 0,\tag{2.8}$$

где

$$\mu = f(m_0 + m_1).\tag{2.9}$$

При этом уравнения (2.7) и (2.8) уже не образуют системы уравнений, а являются независимыми, при этом записанными в разных системах координат.

Сравнивая уравнения (2.6) – (2.8), видим, что они все одинаковы по своей структуре и отличаются только значениями коэффициентов во вторых слагаемых левых частей, а в случае уравнений (2.7) и (2.8) эти коэффициенты совпадают. В двух случаях относительного движения (2.7) и (2.8) начальные условия будут определяться противоположными векторами, а в барицентрической системе – векторами, противоположными по направлению и пропорциональными по модулю. Это означает, что во всех случаях движение будет происходить по орбитам, геометрически подобным, а в двух случаях относительного движения просто по одинаковым, но двигаться точки будут в противоположных направлениях. Поэтому не имеет смысла вопрос, какая именно точка (M_1 или M_0) движется относительно другой. В частности, движение Солнца относительно Земли так же реально, как и движение Земли относительно Солнца. Это замечание, которое вытекает из принципа относительности движения, нужно сделать, ибо в бытовом сознании, а иногда и научно-популярной и учебной литературе звучит мысль о том, что когда-то считалось, что Солнце движется вокруг Земли, а вот Коперник установил, что все происходит на самом деле наоборот – Земля движется вокруг Солнца. Но если оба движения одинаково реальны, то возникает вопрос – в чем же тогда различие между гелиоцентрической и геоцентрической системами координат или, говоря по-старому, между гелиоцентрической и геоцентрической системами мира? Ответ следует из того объективного обстоятельства, что масса Солнца

намного больше массы Земли ($m_0 \gg m_1$). Из этого и соотношений (2.4) вытекает, что в барицентрической системе размеры орбит и возникающих ускорений обратно пропорциональны массам точек M_0 и M_1 . А это, в свою очередь, означает, что система координат, связанная с точкой большой массы (Солнцем), очень близка к инерциальной, а система, связанная с точкой малой массы (Землей), существенно неинерциальна. С физической точки зрения это обусловлено тем, что сила, с которой Солнце притягивает Землю, равна силе, с которой Земля действует на Солнце, однако ускорения, которые при этом возникают, обратно пропорциональны массам. А именно с величиной ускорения начала системы координат и связана степень неинерциальности этой системы. Но указанное различие между гелиоцентрической и геоцентрической системами проявляется лишь тогда, когда мы начинаем рассматривать в каждой из них движение какого-либо третьего тела, например, Марса. Его движение в почти инерциальной гелиоцентрической системе значительно проще, нежели в неинерциальной геоцентрической. В этом состоит чисто механический смысл перехода от геоцентрических представлений к гелиоцентрическим.

При всем этом нужно понимать, что исторически геоцентрическая система Птолемея (точнее Гиппарха–Птолемея, ибо именно Гиппарх первым применил эпициклы и дифференты для описания движения небесных тел) была и остается огромным достижением науки на ее пути познания человеком окружающего мира. Она была первой теорией, которая позволила с определенной точностью описывать и прогнозировать положения тел Солнечной системы и опиралась на определенные физические основания. А именно она исходила из физики Аристотеля, в которой утверждалась абсолютность скоростей, а не ускорений. Это, в свою очередь, было обобщением бытового и производственного опыта того времени – для движения с постоянной скоростью нужно было прилагать постоянную силу (на самом деле, как мы теперь это понимаем, для уравновешивания постоянной силы трения). Отсюда вытекала и абсолютизация состояний равномерного движения и покоя. С математической же точки зрения, если перевести сделанное Гиппархом и Птолемеем с присущего античной науке геометрического языка на современный аналитический, то это не что иное, как разложение координат небесных тел, как функций времени, в ряды Фурье, то есть использование такого математического аппарата, все значения которого раскрываются лишь в современную эпоху. В то же время все сказанное ни в коей мере не преуменьшает значения того, что сделали Н. Коперник и его последователи, создав новую физику и новую астрономию и, прежде всего, их основу – классическую механику, которая более адекватно описывает огромное количество явлений в природе и дала теоретические предпосылки для могучего технологического прогресса человечества. В свою очередь, классическая механика, как позже выяснилось, имеет ограничения в своем применении со стороны квантовой физики и теории относительности. В связи с последним замечанием заметим, что наблюдательный факт огромного

различия между массами Солнца и Земли приводит к тому, что физическое различие между гелиоцентрической и геоцентрической системами отсчета сохраняется и в рамках общей теории относительности (см. об этом подробнее в [13]).

После сделанного историко-методологического отступления вернемся снова к задаче двух тел. Обозначим в дальнейшем наши материальные точки, как и их массы, как M и m . Будем рассматривать движение точки m относительно точки M , описываемое уравнением

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad \mu = f(M+m) \quad (2.10)$$

и начальными условиями

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0) \quad (2.11)$$

в системе координат x, y, z (рис. 2.2). Постоянная μ носит название *гравитационной постоянной задачи двух тел*. Обратим внимание на то, что она зависит от суммы масс обеих рассматриваемых материальных точек. Это особенно существенно при рассмотрении двойных звездных систем. Но при изучении движения малых планет, комет относительно Солнца, при рассмотрении движения искусственных небесных тел меньшей массой можно пренебречь.

Мы найдем общее решение уравнения (2.10), а точнее говоря, системы дифференциальных уравнений шестого порядка методом первых интегралов. Заметим перед этим, что целесообразно, особенно при изучении движения тел Солнечной системы, вводить специальную астрономическую (*гауссову*) систему единиц измерения – длину измерять в астрономических единицах (а. о.), время – в средних солнечных сутках, массу – в долях массы Солнца. Тогда гравитационная постоянная $f = 0.0029591$. А величина, которая часто встречается, $k = \sqrt{f} = 0.0172021$. Постоянная k получила название *постоянной Гаусса*.

2.1.2. Первые интегралы задачи двух тел. Поскольку мы рассматриваем относительное движение (то есть движение в неинерциальной системе координат), то из десяти классических интегралов будут существовать лишь четыре – векторный *интеграл момента* и скалярный – *интеграл энергии*. Для получения первого из них умножим уравнение движения (2.10) на радиус-вектор \vec{r} векторно слева. Прибавив к этому произведению равенство $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$, будем иметь:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0. \quad (2.12)$$

Интегрируя, получаем:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}. \quad (2.13)$$

Это означает, что кинетический момент точки m сохраняется, а постоянная интегрирования \vec{c} равняется этому моменту в расчете на единицу массы.

Чтобы получить *интеграл энергии*, умножим уравнение (2.10) на вектор скорости $\dot{\vec{r}}$ скалярно:

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^3}. \quad (2.14)$$

Имеет место равенство $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r \cdot \dot{r}$, вытекающее из того, что $r = |\vec{r}|$, а \dot{r} есть скорость изменения величины r и равняется проекции вектора $\dot{\vec{r}}$ на направление вектора \vec{r} , то есть $\dot{r} = |\dot{\vec{r}}| \cos(\dot{\vec{r}}, \vec{r})$. Обозначая модуль скорости $|\dot{\vec{r}}|$ через V , будем иметь, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(V^2) = -\frac{\mu}{r^2} = \mu \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (2.15)$$

а после интегрирования

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \quad (2.16)$$

где постоянная h – удвоенная полная энергия, снова-таки приходящаяся на единицу массы точки m .

Оставляя полный анализ свойств движения, вытекающих из наличия этих двух первых интегралов на дальнейшее, отметим лишь, что из интеграла момента и свойств векторного произведения следует, что векторы \vec{r} и $\dot{\vec{r}}$ перпендикулярны вектору момента \vec{c} .

Интегрируемость задачи двух тел проявляется в том, что кроме найденных классических интегралов существует еще один специфический именно для этой задачи первый интеграл. Чтобы найти его, умножим векторно уравнение движения на интеграл момента справа:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{c} + \mu \frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{r^3} = 0. \quad (2.17)$$

Первое слагаемое слева это производная от величины $\vec{r} \times \vec{c}$. Нужно показать, что и второе слагаемое является полной производной. Вычисляя по известной формуле двойное векторное произведение, получим, что

$$\frac{\vec{r} \times \vec{r} \times \dot{\vec{r}}}{r^3} = \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}^2}{r^3} = -\frac{\dot{\vec{r}}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \quad (2.18)$$

Подставляя (2.18) в (2.17), имеем после интегрирования, что

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{c} - \mu \frac{\vec{r}}{r} = \vec{\lambda}. \quad (2.19)$$

Этот первый интеграл задачи двух тел получил название *интеграла Лапласа*, а постоянная $\vec{\lambda}$ – это *вектор Лапласа*. Таким образом, имеем семь первых интегралов – два векторных и один скалярный. Но способ нахождения интеграла Лапласа заставляет прийти к выводу, что не все найденные первые интегралы независимы. И действительно, между постоянными интегрирования \vec{c} , $\vec{\lambda}$ и h существуют два соотношения, которые их связывают. Первое из них легко получить, если перемножить скалярно интеграл момента и интеграл Лапласа. При этом

$$\vec{c} \cdot \vec{\lambda} = \vec{c} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) - \mu \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{r^3} = 0, \quad (2.20)$$

ибо каждое из смешанных произведений векторов, содержащихся в (2.20), имеет по два одинаковых множителя. Таким образом, вектор момента и

вектор Лапласа перпендикулярны между собой. Второе соотношение связывает модули этих векторов. Найдем скалярный квадрат вектора Лапласа:

$$\lambda^2 = (\dot{\vec{r}} \times \vec{c})^2 - 2\mu \frac{(\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) \cdot \vec{r}}{r} + \mu^2 \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)^2 = c^2 V^2 - 2\mu \frac{c^2}{r} + \mu^2. \quad (2.21)$$

Исключая V^2 с помощью интеграла энергии, получим окончательно, что

$$\lambda^2 = hc^2 + \mu^2. \quad (2.22)$$

Таким образом, мы имеем *пять* независимых первых интегралов, что позволяет свести систему дифференциальных уравнений шестого порядка к одному уравнению первого порядка.

2.1.3. Уравнение орбиты и закон движения в задаче двух тел. Перейдем к исследованию движения в задаче двух тел. Во-первых, из того факта, что радиус-вектор точки m и вектор ее скорости перпендикулярны к постоянному вектору момента, вытекает, что плоскость, определяемая векторами \vec{r} и $\dot{\vec{r}}$, сохраняет постоянной свою ориентацию в пространстве и перпендикулярна вектору \vec{c} . Но она содержит вектор \vec{r} , а значит, и точку M_0 – начало координат. То есть эта плоскость, в которой движется точка m , является неподвижной в системе координат x, y, z . Ее уравнение в векторной форме есть $\vec{c} \cdot \vec{r} = 0$, а в координатной –

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0, \quad (2.23)$$

если c_1, c_2, c_3 – соответствующие компоненты вектора \vec{c} .

Поскольку вектор Лапласа перпендикулярен нормальному вектору плоскости движения \vec{c} , то и он также лежит в этой плоскости. Это позволяет ввести в плоскости движения прямоугольную систему координат ξ, η , где ось ξ направлена по вектору Лапласа $\vec{\lambda}$, а также полярную систему координат r, ν , где полярный угол ν , имеющий в астрономии название *истинной аномалии*, отсчитывается от направления вектора $\vec{\lambda}$. Если ввести еще ось ζ , направленную по вектору момента \vec{c} , то получим в пространстве наряду с исходной системой координат x, y, z , еще и связанную с плоскостью движения систему ξ, η, ζ , которая получила название *орбитальной системы координат*. Заметим, что исходная система координат – это чаще всего гелиоцентрическая эклиптическая система или геоцентрическая экваториальная. Но в случае нужды это может быть сelenоцентрическая или какая-либо планетоцентрическая система координат. Если рассматривается движение в двойной звездной системе, то часто за основную плоскость исходной системы координат берут картинную плоскость, являющуюся касательной к небесной сфере.

Найдем теперь уравнение траектории движения в задаче двух тел или, выражаясь астрономическим языком, *уравнение орбиты* точки m , прежде всего в полярной системе r, ν . Для этого умножим скалярно интеграл Лапласа $\vec{\lambda}$ на радиус-вектор \vec{r} :

$$r\lambda \cos \nu = \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) - \mu \frac{\vec{r}^2}{r} = c^2 - \mu r. \quad (2.24)$$

Находя отсюда величину r как функцию угла v , получим уравнение орбиты:

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} \cos v}, \quad (2.25)$$

которое совпадает с уравнением

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (2.26)$$

если положить

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (2.27)$$

Как известно, уравнение (2.26) – это уравнение кривой второго порядка в случае, когда полярная ось направлена из фокуса кривой в сторону ближайшей вершины. Величина p – *фокальный параметр* кривой (или просто ее параметр), который равен длине фокальной полуходры, проходящей через фокус перпендикулярно большой оси эллипса, вещественной оси гиперболы или оси симметрии параболы (рис. 2.3). Значение эксцентриситета e определяет то, о какой именно кривой второго порядка идет речь. Если $e=0$, то это окружность, при $e<1$ – эллипс, значение $e=1$ дает параболу, $e>1$ – гиперболу. Однако орбитой будет именно одна из этих кривых только тогда, когда отличен от нуля параметр p , а значит, и кинетический момент c . Если же $c=0$, то векторы \vec{r} и $\dot{\vec{r}}$ – коллинеарны, а орбита – это прямая, проходящая через начало координат.

Таким образом, мы установили *первый закон Кеплера* в его обобщенной форме: *в относительной задаче двух тел материальная точка движется по кривой второго порядка, в одном из фокусов которой находится притягивающий центр*.

Напомним в связи с этим необходимые для дальнейшего сведения о кривых второго порядка, которые называются так потому, что их уравнения в декартовых координатах при любом размещении их на плоскости являются алгебраическими уравнениями второй степени. Их канонические уравнения (центр системы координат совпадает с центром эллипса или гиперболы или с вершиной параболы, ось x направлена по большой оси эллипса, вещественной оси гиперболы или оси симметрии параболы) такие:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{– эллипс,} \quad (2.28)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{– гипербола,} \quad (2.29)$$

$$y^2 = 2px \quad \text{– парабола,} \quad (2.30)$$

где a и b – длины большой и малой полуосей эллипса или вещественной и мнимой полуосей гиперболы.

Отношение расстояния от центра эллипса или гиперболы до их фокусов – *фокусного расстояния* c (не путать с модулем вектора момента \vec{c}) к значению a определяет их *эксцентриситет*, то есть

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a}, \quad (2.31)$$

где знак “–“ относится к эллипсу, знак “+” – к гиперболе. Исходя из геометрического смысла параметра p , можно получить формулы

$$p = a(1 - e^2) \text{ – эллипс,} \quad (2.32)$$

$$p = a(e^2 - 1) \text{ – гипербола.} \quad (2.33)$$

Обратим внимание на то, что значение эксцентриситета $e=1$ можно получить двумя способами. Во-первых, можно, зафиксировав одну вершину и один фокус, заставить центр эллипса и другой его фокус и другую вершину удалиться вдоль большой оси на бесконечность, тогда $e \rightarrow 1$, ибо и $c \rightarrow \infty$ и $a \rightarrow \infty$. При этом эллипс разорвется и превратится в параболу. Во-вторых, можно при фиксированной большой полуоси эллипса a устремить к 0 малую полуось b , и снова $e \rightarrow 1$ (см. формулу (2.31)). В этом случае эллипс сплющится в двойной отрезок длиною $2a$. Гипербола при такой процедуре превратится в два двойных луча.

Другое название рассматриваемого класса кривых – *конические сечения* – связана с тем, установленным еще в древности способом получения этих кривых как сечений, образующихся при пересечении прямого кругового конуса плоскостью, которая пересекает этот конус под разными углами к его оси. Это наглядно подтверждает то, что все эти на первый взгляд различные по форме кривые действительно образуют некоторое единое семейство кривых (см. рис. 2.4).

Возвращаясь к задаче двух тел, видим, что вектор Лапласа определяет направление из фокуса, в котором размещен притягивающий центр, на ближайшую к нему вершину – *перицентру* орбиты. В случае эллиптической орбиты есть также и самая удаленная от притягивающего центра точка – *апоцентру*. Обобщающее название этих двух точек – *апсиды*, а линия, которая их соединяет, – это *линия апсид*. Если речь идет о движении около отдельных конкретных тел, то названия апсид образуются по традиции от древнегреческих названий центрального тела. Так, околосолнечные орбиты имеют перигелий (но афелий), околоземные – перигей и апогей, окололунные – периселений и апоселений, околомарсианские – периарий и апоарий. У орбит компонент двойных звезд естьperiастр и апоастр.

Кроме уравнения орбиты нужно иметь еще *закон движения* по этой орбите, иначе говоря, зависимость истинной аномалии v , а тем самым и радиуса r , от времени t . Чтобы найти этот закон, рассмотрим модуль интеграла момента

$$rV \sin(\dot{\vec{r}}, \vec{r}) = c. \quad (2.34)$$

Но величина $V \sin(\dot{\vec{r}}, \vec{r})$ – это перпендикулярная к радиусу-вектору компонента скорости, или круговая скорость, равная произведению радиуса r на угловую скорость $\omega = \dot{\nu}$. Поэтому

$$r^2 \dot{\nu} = c. \quad (2.35)$$

Интегрируя (2.35) с учетом (2.26) и (2.27), получим закон движения в таком виде:

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (2.36)$$

Постоянная τ – это шестая независимая постоянная, которая вместе с постоянными первых интегралов \vec{c} , $\vec{\lambda}$, h определяет общее решение задачи двух тел. Так как при $t = \tau$ значение истинной аномалии v должно равняться нулю, то физический смысл постоянной τ – это *момент прохождения точкой m перигея ее орбиты*. Интеграл, стоящий слева в (2.36), может быть найден в элементарных функциях хотя бы с помощью универсальной замены $s = \operatorname{tg}(v/2)$, но он имеет в общем случае довольно громоздкий вид. А поэтому он будет вычислен отдельно при рассмотрении каждого из возможных типов кеплеровского движения. Во всяком случае его нахождение определяет истинную аномалию как функцию времени и дает возможность найти расстояние r и орбитальные координаты, при этом

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v, \quad \zeta = 0, \quad (2.37)$$

или, что то же самое, найти радиус-вектор точки m в орбитальной системе координат, который мы обозначим как $\vec{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$.

Чтобы найти решение задачи двух тел в исходной системе координат x , y , z , то есть найти радиус-вектор \vec{r} , нужно матрицу направляющих косинусов системы координат ξ , η , ζ относительно системы x , y , z умножить на вектор $\vec{\rho}$. Введем единичные векторы \vec{P} , \vec{Q} , \vec{R} – орты осей ξ , η , ζ соответственно. Тогда матрица направляющих косинусов будет состоять из компонент векторов \vec{P} , \vec{Q} , \vec{R} . А выражение для нахождения вектора \vec{r} можно записать таким образом:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{Q} \\ \vec{R} \end{pmatrix} \cdot \vec{\rho}. \quad (2.38)$$

При этом орты осей орбитальной системы координат, исходя из ее определения, нужно вычислять по формулам:

$$\vec{P} = \frac{\vec{\lambda}}{\lambda}, \quad \vec{Q} = \frac{\vec{c} \times \vec{\lambda}}{c \lambda}, \quad \vec{R} = \frac{\vec{c}}{c}. \quad (2.39)$$

Теперь общее решение задачи двух тел можно определить произвольными постоянными \vec{P} , \vec{Q} , \vec{R} , e , p , τ . Эти постоянные, как и постоянные первых интегралов, нужно вычислять при нахождении какого-либо частного решения с помощью начальных условий (2.11) по соотношениям (2.13), (2.16), (2.19), (2.27), (2.26) и (2.39). В астрономии постоянные интегрирования, определяющие орбиту небесного тела и его

движение по этой орбите, имеют название *элементов орбиты*. В частности, векторы \vec{P} , \vec{Q} , \vec{R} называются *векторными элементами орбиты*.

Интегралу момента можно придать еще такой вид:

$$\vec{r} \times d\vec{r} = \vec{c} dt. \quad (2.40)$$

Теперь модуль его левой части – это удвоенная площадь треугольника, построенного на векторах \vec{r} и $\vec{r} + d\vec{r}$, что с точностью до бесконечно малых высших порядков совпадает с площадью dS сектора, который описывается радиусом-вектором \vec{r} за время dt , то есть

$$dS = \frac{1}{2} c dt. \quad (2.41)$$

Интегрирование (2.41) дает:

$$S = \frac{1}{2} ct + c_0. \quad (2.42)$$

Равенства (2.41) и (2.42) выражают *второй закон Кеплера*. Его можно сформулировать таким образом: *секториальная скорость кеплеровского движения есть величина постоянная или радиус-вектор точки описывает за одинаковые промежутки времени секторы одинаковой площади*. Нужно только заметить, что (2.42) не является еще одним первым интегралом уравнений движения потому, что площадь сектора, образованного дугой кривой второго порядка (кроме окружности), не выражается конечным образом через координаты его вершин. Как известно, И. Кеплер установил три закона планетных движений, но третий закон по его смыслу относится лишь к случаям периодического движения и будет рассмотрен в пунктах 2.2.1 и 2.2.3.

2.1.4. Кеплеровские элементы орбиты. Элементы орбиты \vec{P} , \vec{Q} , \vec{R} , e , p , τ могут быть разделены на три группы. Первая (векторные элементы) определяет положение плоскости орбиты в пространстве и ориентацию орбиты в этой плоскости. Другая группа (e , p) определяет форму и размер орбиты. В третью группу входит один элемент τ , который определяет движение материальной точки по орбите и поэтому называется *динамическим* элементом. Но среди девяти элементов матрицы направляющих косинусов, которую образуют векторные элементы, лишь три независимы, ибо они связаны шестью соотношениями ортонормированности. Поэтому более “экономным” способом задания положения орбиты было бы задание трех углов Эйлера [25], определяющих положение орбитальной системы координат относительно исходной координатной системы.

Эти три угла вводятся следующим образом (см. рис. 2.5). В общем случае плоскость орбиты пересекает основную координатную плоскость xy по некоторой прямой, на которой лежат точки пересечения самой орбиты с плоскостью xy . Эти точки называются *узлами орбиты*, а сама линия пересечения – это *линия узлов*. Та точка пересечения, в которой точка m в процессе своего движения изменяет знак аппликаты с отрицательного на положительный, получила название *восходящего узла* и обозначается буквой Ω , а точка, в которой знак изменяется с “+” на “–”, – *нисходящий узел*, он

обозначается той же буквой, но перевернутой. Происхождение этих обозначений связано с древнегреческим обозначением созвездия Весов, в котором в те времена находилась точка весеннего равноденствия, являющаяся восходящим узлом орбиты Солнца в его годичном движении вокруг Земли. Первым углом Эйлера является угол между положительным направлением оси x исходной системы координат и направлением на восходящий узел орбиты. Этот угол также обозначается буквой Ω и называется *долготой восходящего узла* (или просто *долготой узла*). Угол между направлением на восходящий узел и направлением наperiцентр орбиты имеет название *перицентрового расстояния* и обозначается буквой ω . Третьим углом Эйлера является угол между координатной плоскостью xy и плоскостью орбиты (или, что тоже самое, между их нормалями – осями z и ζ), он называется *наклонением орбиты*.

Долгота узла отсчитывается от оси x в направлении оси y , перицентровое расстояние – от линии узлов в направлении движения точки m . Эти углы могут принимать значения от 0° до 360° . Наклонение орбиты i лежит в пределах от 0° до 180° . Оно меньше 90° , если проекция точки m на плоскость xy движется в первой четверти в направлении от оси x к оси y , и больше 90° , если это движение происходит в противоположном направлении. В первом случае движение называется *прямым*, во втором – *обратным*.

Выше мы определили величины Ω и ω как центральные углы между некоторыми направлениями, а узлы орбиты – как точки пересечения линии узлов с самой орбитой. Но иногда полезно под долготой узла и перицентровым расстоянием понимать соответствующие дуги на небесной сфере, тогда узлы – это точки пересечения линии узлов с этой небесной сферой. О чем именно идет речь в каждом конкретном случае, как правило, ясно из контекста.

Шесть независимых величин $(\Omega, \omega, i, e, p, \tau)$ полностью и однозначно определяют движение точки в задаче двух тел. Они получили название *кеplerовских элементов орбиты*. Этот набор элементов пригоден для любой криволинейной орбиты. В отдельных случаях он может быть модифицирован определенным образом. Так, вместо параметра орбиты p можно ввести большую полуось эллиптической орбиты a .

Чтобы найти общее решение задачи двух тел, выраженное через кеплеровские элементы орбиты, заметим, что для расстояния r и истинной аномалии v это уже сделано. Поэтому достаточно найти направляющие косинусы радиуса-вектора \vec{r} , которые мы обозначим как α, β, γ , то есть положим $\vec{r}^0 = \vec{r} / r \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$. Чтобы найти эти направляющие косинусы, рассмотрим проекцию орбиты на небесную сферу (рис. 2.6). Тогда стороны в сферическом треугольнике $x\Omega m$ равняются: $x\Omega = \Omega$, $\Omega m = \omega + v = u$, а угол $x\Omega m = 180 - i$. Отсюда

$$\alpha = \cos(xm) = \cos\Omega \cos u - \sin\Omega \sin u \cos i. \quad (2.43)$$

Аналогично получим, что

$$\begin{aligned}\beta &= \cos(ym) = \sin\Omega \cos u + \cos\Omega \sin u \cos i, \\ \gamma &= \cos(zm) = \sin u \sin i.\end{aligned}\quad (2.44)$$

Теперь можно записать, что координаты точки m в исходной системе координат равны

$$\begin{aligned}x &= r\alpha = r(\cos\Omega \cos u - \sin\Omega \sin u \cos i), \\ y &= r\beta = r(\sin\Omega \cos u + \cos\Omega \sin u \cos i), \\ z &= r\gamma = r \sin u \sin i.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Формулы (2.26), (2.36) и (2.45) дают общее решение задачи двух тел в кеплеровских элементах. Заметим при этом, что величина u – это угловое расстояние между линией узлов и текущим радиусом-вектором точки m , оно называется *аргументом широты*.

По определению ортов \vec{P} и \vec{Q} они равняются орту \vec{r}/r при значениях $u=\omega$ и $u=\omega+90^\circ$ (это, кстати, объясняет еще одно название величины ω – *аргумент перицентра*). Поэтому формулы (2.43) и (2.44) дают такую связь между векторными элементами орбиты и кеплеровскими:

$$\begin{aligned}P_x &= \cos\Omega \cos\omega - \sin\Omega \sin\omega \cos i, \\ P_y &= \sin\Omega \cos\omega + \cos\Omega \sin\omega \cos i,\end{aligned}\quad (2.46)$$

$$\begin{aligned}P_z &= \sin\omega \sin i, \\ Q_x &= -\cos\Omega \sin\omega - \sin\Omega \cos\omega \cos i, \\ Q_y &= -\sin\Omega \sin\omega + \cos\Omega \cos\omega \cos i,\end{aligned}\quad (2.47)$$

$$Q_z = \cos\omega \sin i.$$

Непосредственно проектируя вектор \vec{R} на оси x , y , z получим, что

$$\begin{aligned}R_x &= \sin\Omega \sin i, \\ R_y &= -\cos\Omega \sin i, \\ R_z &= \cos i.\end{aligned}\quad (2.48)$$

Теперь общее решение задачи можно записать еще и следующим образом, если использовать формулы (2.37) и (2.38):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \xi + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \eta. \quad (2.49)$$

Дифференцируя выражения (2.45) или (2.49) по времени t , можно найти компоненты вектора скорости $\dot{\vec{r}} \equiv (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Полезным является также разложение этого вектора на *радиальную* V_r и *нормальную* к радиусу-вектору (тангенциальную) V_n компоненты. Очевидно, что $V_r = \dot{r}$, а $V_n = r\dot{\nu}$. Дифференцируя (2.26) по времени и учитывая (2.35) и (2.37), получим, что

$$\begin{aligned}
 V_r &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v, \\
 V_n &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v), \\
 V &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

2.1.5. Классификация движений в задаче двух тел. Рассмотрим детальнее, при каких условиях будет иметь место в задаче двух тел тот или иной тип кеплеровского движения. Информацию об этом можно свести в таблицу (см. табл. 2.1).

Таблица 2.1
Типы кеплеровского движения

Тип движения	e	c	λ	h	V_r	$\delta = (r, V)$
Круговой	0	$\neq 0$	0	$-\mu/r$	$V^2 = \mu/r$	90°
Эллиптический	$0 < e < 1$	$-\infty$	$< \mu$	$-\mu/a$	$V^2 < 2\mu/r$	$0 < \delta \leq 180^\circ$
Параболический	1	$-\infty$	μ	0	$V^2 = 2\mu/r$	$-\infty$
Гиперболический	> 1	$-\infty$	$> \mu$	μ/a	$V^2 > 2\mu/r$	$-\infty$
Прямолинейный	1	0	произв.	произв.	произв.	0° или 180°

Первый и второй столбцы табл. 2.1 следуют из первого закона Кеплера и теории кривых второго порядка. Третий столбец фиксирует значения кинетического момента в криволинейном и прямолинейном движениях. Четвертый столбец содержит связь между гравитационной постоянной задачи μ и величиной вектора Лапласа λ , вытекающую из соотношений (2.22) и (2.27). Выводы относительно величины удвоенной полной энергии h , содержащиеся в пятом столбце, следуют из данных третьего и четвертого столбцов и соотношения (2.22).

Подчеркнем, что в круговом и эллиптическом движениях, которые являются *финитными*, другими словами, происходят в ограниченной части плоскости, полная энергия отрицательна – кинетической энергии не хватает для преодоления гравитационного действия притягивающего центра. В *инфinitных* случаях параболического и гиперболического движений полная энергия не меньше нуля, и движущаяся точка преодолевает силу тяготения и уходит на бесконечность. Из этих ограничений на значения полной энергии и интеграла энергии (2.16) вытекают соотношения между скоростью точки и расстоянием, на котором она находится в данный момент, приводимые в шестом столбце табл. 2.1. В случаях кругового и прямолинейного движений значения угла δ следуют из очевидных геометрических соображений. В остальных случаях наибольшее значение этот угол имеет в перицентре орбиты. К нулю он стремится тогда, когда точка уходит по параболе или гиперболе на бесконечность, а в случае эллиптического движения это

происходит на концах малой оси эллипса тогда, когда она неограниченно уменьшается.

Особое значения для астрономии и космонавтики имеют соотношения первое и третье шестого столбца табл. 2.1. Это не что иное, как известные формулы для *круговой* и *параболической* скоростей:

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}, \quad V_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}. \quad (2.51)$$

Заметим, что первую из этих формул можно найти из элементарных соображений, если приравнять друг другу гравитационное и центробежное ускорения (их равенство как раз создает условия невесомости на борту искусственного спутника или орбитальной станции):

$$\frac{\mu}{r^2} = \frac{V^2}{r}, \quad (2.52)$$

откуда снова следует формула для круговой скорости. Если выразить расстояние r через радиус центрального тела R и высоту полета H , а гравитационную постоянную μ через радиус тела и ускорение силы тяжести на его поверхности g , то формулы (2.51) превратятся в такие:

$$V_c = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H}}, \quad V_p = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H}}. \quad (2.53)$$

Если же теперь положить высоту $H=0$, то получим круговую и параболическую скорости возле поверхности данного небесного тела, которые известны как *первая* и *вторая космические скорости*:

$$V_1 = \sqrt{gR}, \quad V_2 = \sqrt{2gR}. \quad (2.54)$$

Вторая космическая скорость имеет еще название скорости освобождения или скорости ускользания.

Рассмотрим соотношение между различными типами движения в задаче двух тел еще с одной точки зрения. Пусть все возможные начальные условия реализуются с одинаковой вероятностью. Тогда значения λ и e будут случайными величинами, равномерно распределенными на интервале $[0, \infty)$. Зададим вопрос: какова вероятность каждого из криволинейных типов кеплеровского движения? Согласно методу вычисления так называемых геометрических вероятностей вероятности кругового и параболического движений равны 0, ибо им отвечают отдельные точки на луче возможных значений эксцентриситета (рис. 2.7). Это примеры событий, которые имеют нулевую вероятность, однако возможны.

К вычислению вероятностей эллиптического и гиперболического движений можно подойти следующим образом. Допустим, что длина отрезка на полуоси рис. 2.7, соответствующая гиперболическому движению, велика, но конечна, и равна l . Тогда отношение вероятностей эллиптического $p(e < 1)$ и гиперболического $p(e > 1)$ движений равно $1/l$. Если теперь устремить l к бесконечности и учесть, что сумма вероятностей равна 1, то будем иметь, что $p(e < 1) = 0$, а $p(e > 1) = 1$. Но такой ответ не будет правильным хотя бы потому, что на числовой оси значений полной энергии $h/2$ случаи эллиптического и

гиперболического движения занимают одинаковые симметричные лучи $h < 0$ и $h > 0$. И ошибка тут состоит в том, что отрезок $(0,1)$ рассматривался как конечная величина, а луч $(1, \infty)$ как бесконечная. В действительности же оба они образованы бесконечными множествами точек, и нужно каким-либо образом сопоставить количества точек в этих множествах. Если сделать преобразование $e \rightarrow 1/e$, то оно сопоставит точке отрезка $(0,1)$ одну и только одну точку луча $(1, \infty)$ и наоборот. Иначе говоря, это преобразование устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками обоих множеств. Это означает, что количества точек в этих множествах нужно считать одинаковыми. Говоря языком теории множеств, эти два множества имеют одинаковую меру. Поэтому и вероятности эллиптического и гиперболического движений одинаковы и равны $p(e < 1) = p(e > 1) = 1/2$.

Зададим еще и такой вопрос: каковы вероятности того, что значение эксцентриситета будет числом рациональным или иррациональным? Известно, что из точек числовой оси, которые отвечают рациональным числам, можно образовать лишь отрезок бесконечно малой длины или, как говорят, их множество имеет нулевую меру (хотя этих точек и бесконечно много). Из этого следует, что вероятность $p(e_r) = 0$. В соответствии с этим, величина $p(e_{ir}) = 1$. Но с другой стороны, значения эксцентриситета орбиты любого небесного тела определяются на основе каких-либо его позиционных наблюдений, имеющих ограниченную точность. При этом последнее утверждение имеет всеобщий принципиальный характер. Поэтому имеют смысл лишь рациональные значения эксцентриситета (как и любой другой измеряемой величини), то есть значение $p(e_r) = 1$, а вероятность $p(e_{ir}) = 0$. Парадокс, к которому мы пришли, имеет глубокую природу (другие его формы – это известные апории Зенона “Ахиллес и черепаха” и “Стрела”). Он связан с двумя принципиально различными картинами мира. Первая, классическая, исходит из того, что мир состоит из дискретных точечных объектов, а это обуславливает бесконечную делимость его характеристик, прежде всего пространственно-временных. В основе другой картины, квантовой, лежит представление о том, что составляющие элементы мира одновременно имеют и дискретные, и непрерывные свойства (дуализм “частица-волна”). А для снятия противоречия этой картины мира с законом исключенного третьего как раз и необходимо соотношение неопределенностей, которое принципиально ограничивает точность любых измерений. При этом не следует думать, что к измерениям масс и расстояний, с которыми имеет дело небесная механика, квантовое соотношение неопределенностей не имеет никакого отношения. При измерении характеристик движения естественных и искусственных небесных тел радиотехническими средствами квантовые шумы ограничивают точность измерений (хотя, конечно, не только они).

2.2. Отдельные типы кеплеровского движения

Типы движений в задаче двух тел можно расположить в такой последовательности: основные – эллиптическое и гиперболическое, предельные – круговое и параболическое, вырожденное – прямолинейное. В таком порядке мы и рассмотрим каждый из этих типов.

2.2.1. Эллиптическое движение. Этот тип движения имеет место тогда, когда постоянные первых интегралов принимают такие значения – $c \neq 0$, $0 < \lambda < \mu$, $h < 0$. Для того, чтобы завершить решение задачи, нужно найти связь между истинной аномалией и временем в конечном виде, то есть вычислить интеграл

$$\int_0^v r^2 dv = c(t - \tau). \quad (2.55)$$

Интересным историческим обстоятельством является то, что замену переменных, с помощью которых этот интеграл вычисляется весьма просто, нашел И. Кеплер еще тогда, когда дифференциального и интегрального исчисления не существовало, нашел геометрическим путем. Если провести перпендикуляр к большой оси эллиптической орбиты через текущее положение точки, которая движется по этой орбите, до пересечения с окружностью, построенной на этой оси как на диаметре, то величина угла в центре эллипса между большой осью и направлением на эту точку пересечения как раз и будет новой переменной интегрирования. Этот угол E (см. рис. 2.8) получил название *эксцентрической аномалии*. Из рассмотрения треугольников ΔP_1MP та ΔP_1OP_2 и определения эксцентриситета (2.31) вытекает, что

$$a \cos E = ae + r \cos v. \quad (2.56)$$

С помощью уравнения эллипса (2.28) можно получить, что отношение между ординатами точек на эллипсе с полуосами a и b на окружности радиуса a при одном и том же значении абсциссы:

$$\frac{y_c}{y_e} = \frac{a}{b},$$

это с помощью (2.31) даст, что

$$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (2.57)$$

По формулам (2.56) и (2.57) теперь легко найти орбитальные координаты:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos v = a(\cos E - e), \\ \eta &= r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \end{aligned} \quad (2.58)$$

а извлекая квадратный корень из суммы их квадратов, получим, что радиус

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.59)$$

Теперь из (2.56) можно найти, что

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad (2.60)$$

а из (2.57) – что

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 - e \cos E}. \quad (2.61)$$

Находя величину $\sin v / (1 + \cos v)$, которая равна $\operatorname{tg}(v/2)$, найдем связь между истинной и эксцентрической аномалиями в таком виде:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (2.62)$$

Эта формула удобна тем, что однозначно связывает четверти, в которых лежат углы v и E . Наконец, дифференцирование (2.61) даст с помощью (2.60), что

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e \cos E} dE. \quad (2.63)$$

Подставляя (2.59) и (2.63) в (2.55), находим с помощью (2.32):

$$\int_0^E (1 - e \cos E) dE = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - \tau) \quad (2.64)$$

или

$$E - e \sin E = n(t - \tau), \quad (2.65)$$

где $n = \sqrt{\mu} / a^{3/2}$. Мы получили знаменитое *уравнение Кеплера*, которое и завершает решение задачи двух тел в случае эллиптического движения. Если обозначить

$$M = n(t - \tau), \quad (2.66)$$

то его более компактная форма будет следующей:

$$E - e \sin E = M. \quad (2.67)$$

Величине M , которую назвали *средней аномалией*, можно придать такой смысл. Если представить себе точку, движущуюся равномерно по окружности радиуса a и проходящую через точки перицентра и апоцентра одновременно с материальной точкой m , то ее положение и будет определяться углом M , который отсчитывается от направления на перицентр и имеет вершину в центре эллипса. Величина n – это средняя угловая скорость движения по эллиптической орбите и в астрономии называется *средним движением*.

Теперь можно рассмотреть и третий закон Кеплера. Если приравнять разность $t - \tau$ периоду оборота материальной точки по эллиптической орбите T , получим, что

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{f(M+m)}}. \quad (2.68)$$

Это и есть *третий закон Кеплера*, но записанный в менее распространенной форме. Он связывает между собой период и величину большой полуоси эллипса, по которому обращаются одна относительно другой материальные точки с массами M и m . Именно в таком виде этот закон применяется при определении суммы масс в двойных звездных системах. Для двух точек с массами m_1 и m_2 , обращающимися около одного и того же притягивающего центра с массой M , из (2.68) получим, что

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{M + m_2}{M + m_1} \cdot \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (2.69)$$

Массы тел Солнечной системы весьма малы по сравнению с массой Солнца. С одной стороны, это и дало И. Кеплеру возможность найти данный закон в его упрощенном виде:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (2.70)$$

С другой стороны, модифицированная форма этого закона, найденная И. Ньютона в виде (2.69), практически не пригодна для определения масс тел Солнечной системы. Для этого закон Кеплера применяется к ситуации, когда около центрального тела (Солнца) с массой M обращается тело с массой m_p (планета), которое имеет спутник с массой m_s . Тогда применение третьего закона Кеплера к паре “Солнце-планета” и к паре “планета-спутник” дает:

$$\frac{T_p^2}{T_s^2} = \frac{m_p + m_s}{M + m_p} \cdot \frac{a_p^3}{a_s^3} \cong \frac{m_p}{M} \frac{a_p^3}{a_s^3}, \quad (2.71)$$

ибо $M \gg m_p$, а $m_p \gg m_s$.

Нужно подчеркнуть чрезвычайно большое значение третьего закона Кеплера для всей астрономии – это единственный прямой способ определения масс небесных тел. Все другие способы основаны или на эмпирических соотношениях, опирающихся в конце концов на данные, полученные с помощью этого третьего закона, или лишь оценки по порядку величины, основанные на оценках размера и плотности тела.

Подставляя выражения для орбитальных координат (2.58) в общие формулы (2.49), получим для координат точки в эллиптическом движении в исходной системе координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (\cos E - e) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E \right], \quad (2.72)$$

а для компонент скорости после дифференцирования (2.72) по времени:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \frac{na^2}{r} \left[- \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \sin E + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos E \right]. \quad (2.73)$$

Модуль скорости в эллиптическом движении определяется из закона сохранения энергии с учетом того, что постоянная $h = -\mu/a$,

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.74)$$

или с учетом (2.59)

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}. \quad (2.75)$$

Как уже отмечалось, можно одни элементы орбиты заменить на другие. Для эллиптического движения прежде всего целесообразно заменить параметр орбиты большой полуосью, но полезными оказываются еще некоторые такие замены. Перицентровое расстояние заменяется на *длготу перицентра*

$$\pi = \Omega + \omega, \quad (2.76)$$

момент прохождения через перицентр τ – на значение средней аномалии M_0 в момент времени t_0 (*средняя аномалия в начальную эпоху*), а сама величина M_0 , в свою очередь, заменяется на *среднюю долготу в начальную эпоху*

$$\varepsilon = \pi + M_0 = \Omega + \omega + M_0. \quad (2.77)$$

Конечно, обозначения π и ε не очень удачные с точки зрения обозначений, принятых в современной математике, но они уже давно стали общепринятыми в небесной механике. Смысл же введения этих элементов состоит в следующем. Углы (дуги) π и ε являются ломанными, то есть их части лежат в разных плоскостях, но зато они вместе с долготой узла Ω отсчитываются от одного и того же основного направления – направления координатной оси x . Кроме того, большую полуось можно заменить на среднее движение n , а эксцентриситет e – на угол эксцентриситета $\varphi = \arcsine e$. Весьма распространенным, в частности в теориях движения планет, является такой набор элементов – $(\Omega, \pi, i, e, a, \varepsilon)$, который называется *эллиптическими кеплеровскими элементами*.

Элементы орбит больших и некоторых малых планет приведены в табл. 2.2 и 2.3. Рассмотрение табл. 2.2 показывает, что значения наклонений и эксцентриситетов достаточно малы, в большинстве своем меньше 4° и 0.05 соответственно. Это вместе с определенными значениями больших полуосей определяет основные характерные черты строения Солнечной системы. Из табл. 2.3 видно, что орбиты малых планет также имеют не очень большие значения наклонений и эксцентриситетов, хотя их характерные значения несколько большие, нежели у больших планет. В то же время встречаются и малые планеты с достаточно большими значениями наклонений и эксцентриситетов. Малые планеты с большими полуосями около 2–4 а. о. (которые движутся между Марсом и Юпитером) образуют *главный пояс малых планет* или астероидов. Количество астероидов главного пояса, для которых определены орбиты, благодаря новым средствам наблюдений быстро возрастает. На начало 2006 г. оно превысило 120 тыс. Достаточно давно известны малые планеты, имеющие такие орбиты, что возможны их более-менее тесные сближения с Землей. В последнее время количество найденных таких объектов также быстро увеличивается, и на начало 2006 г. их уже известно около 4 тыс. (хотя орбиты определены лишь для 420 из них). *Астероидами, сближающимися с Землей* (ACЗ), считаются такие, у которых наименьшее расстояние между их орбитами и орбитой Земли не превышает 30 млн км. При этом за счет изменения движения этих астероидов под возмущающим влиянием больших планет может появиться определенная

вероятность их столкновения с Землей. Это привело к изучению проблемы *астероидной опасности*. Наконец, недавно открыто значительное количество (около 1100, но орбиты определены лишь для 140 из них) астероидных тел, большие полуоси орбит которых превышают размеры орбит Нептуна и Плутона. Они образуют *внешний пояс астероидов* или *пояс Койпера*. Орбиты некоторого количества малых планет расположены между орбитами Юпитера и Нептуна.

Формулы (2.46), (2.47), (2.66) и (2.72) и уравнение Кеплера (2.67) лежат в основе вычисления эфемерид небесных тел, двигающихся по эллиптическим орбитам. Эфемеридами в астрономии называют значения координат небесных тел в определенные моменты времени, вычисленные по известным элементам орбит. Если эфемериды имеют вид таблиц с постоянным шагом по времени, то шаг выбирается таким образом, чтобы координаты на нужный произвольный момент времени можно было найти линейным или квадратичным интерполированием. Полный алгоритм вычисления эфемерид включает ряд технических с точки зрения небесной механики этапов – переход от стандартного (сейчас 2000.0) равноденствия к нужному, переход от эклиптических векторных элементов орбиты к экваториальным, переход от гелиоцентрических координат к геоцентрическим (обычно экваториальным). Как правило, эфемериды включают и видимую звездную величину объекта.

Как правило, в своей практической работе астрономы берут нужные им эфемериды из тех или других ежегодных изданий, где даются вычисленные заранее эфемериды различных небесных тел. Это прежде всего “Астрономический ежегодник Российской академии наук” (бывший “Астрономический ежегодник СССР”) и “The Astronomical almanac”, который издается в США. В основу вычислений эфемерид Солнца, Луны и больших планет в них положена современная теория движения планет и Луны DE2000/LE2000 [48]. В ежегоднике “Эфемериды малых планет” приводятся элементы орбит занумерованных малых планет и эфемериды тех из них, которые имеют противостояния в текущем году. В сокращенном виде и с меньшей точностью эфемериды Солнца, Луны, больших и некоторых малых планет публикуются в “Астрономических календарях”. В Украине такие календари издают Главная астрономическая обсерватория НАНУ в Киеве и Астрономическая обсерватория Одесского университета. Однако каждый астроном при необходимости должен уметь вычислить нужные ему эфемериды. В последнее время эту задачу облегчают машинные каталоги элементов орбит и соответствующие программы вычислений эфемерид для персональных компьютеров. Вообще сейчас интенсивно происходит процесс перехода данных так называемой *эфемеридной астрономии* с бумажных носителей информации на электронные.

Таблица 2.2
Элементы орбит больших планет

Планета	a	T	S	n	i	e	Ω	π	M_0
Меркурий	0.387	0.240	116	4.09°	7.00°	0.206	48°	77°	252°
Венера	0.723	0.615	584	1.60	3.40	0.007	77	131	182
Земля	1.000	1.000	—	0.99	0.00	0.017	—	103	100
Марс	1.524	1.881	780	0.524	1.85	0.093	49	336	335
Юпитер	5.203	11.86	399	0.083	1.30	0.048	100	14	32
Сатурн	9.555	29.54	378	0.034	2.48	0.056	113	93	50
Уран	19.218	84.25	370	0.012	0.76	0.047	74	173	314
Нептун	30.110	165.2	368	0.006	1.77	0.009	132	48	304
Плутон	39.53	250.1	367	0.004	17.50	0.250	110	223	130

a – большая полуось, а. е.; T – сидерический период, годы; S – синодический период, сутки; n – среднее движение, за сутки в градусах; e – эксцентриситет; i – наклонение к эклиптике; Ω – долгота узла; π – долгота перигелия; M_0 – средняя аномалия в эпоху 2000 январь 1.5

Таблица 2.3
Элементы орбит некоторых малых планет

Планета	a	T	S	N	I	e	Ω	π	M_0
1 Церера	2.78	4.60	467	0.214	10.6°	0.077	81°	152°	8°
2 Паллада	2.77	4.61	467	0.214	34.8	0.235	173	123	355
3 Юнона	2.67	4.36	474	0.226	13.0	0.257	171	57	243
4 Веста	2.36	3.63	504	0.272	7.1	0.090	104	254	341
5 Астрея	2.57	4.13	482	0.239	5.4	0.192	142	137	43
6 Геба	2.42	3.78	497	0.261	14.8	0.202	139	17	50
153 Гильда	3.98	7.95	419	0.124	7.8	0.143	229	271	14
433 Эрос	1.46	1.76	846	0.560	10.8	0.223	304	22	57
944	5.84	14.08	393	0.070	42.5	0.658	22	79	223
Гидальго	1.08	1.12	3409	0.881	22.9	0.827	88	119	105
1566 Икар	43.19	283.82	366	0.003	17.2	0.051	273	10	87
20000 Варуна	39.43	247.61	367	0.004	19.8	0.241	71	11	262
28978 Иксион	33.52	194.03	367	0.005	13.8	0.382	132	55	48
1998 BU									

a – большая полуось, а. е.; T – сидерический период, годы; S – синодический период, сутки; n – среднее движение, за сутки в градусах; e – эксцентриситет; i – наклонение к эклиптике; Ω – долгота узла; π – долгота перигелия; M_0 – средняя аномалия в эпоху 2000 январь 1.5

2.2.2. Гиперболическое движение. Условия реализации этого движения – $c \neq 0, \lambda > \mu, h > 0$. Несмотря на качественное различие между эллиптическим и гиперболическим типами движений (первый – финитный, а второй – инфинитный) и внешнее несходство формы орбит, между этими двумя типами движений есть глубокая аналогия. Наиболее полно она выявляется, если для описания гиперболического движения воспользоваться гиперболическими функциями. Состоит эта аналогия в том, что все формулы для гиперболического движения можно формально получить, если в соответствующих формулах для эллиптического движения сделать следующие замены:

$$\sin E \rightarrow shH, \cos E \rightarrow chH, \tan E \rightarrow thH, \quad (2.78)$$

где H – безразмерная переменная, изменяющаяся от $-\infty$ до $+\infty$. Кроме того, нужно заменить все разности на противоположные. В связи с этим поступим таким образом. Выпишем основные соотношения для эллиптического движения (вспомнить их еще раз не помешает) и, пользуясь выше указанной аналогией, запишем соответствующие формулы для гиперболического движения.

Связь между истинной аномалией и переменными E и H :

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad \tan \frac{v}{2} = th \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} th \frac{H}{2}. \quad (2.79)$$

Уравнение Кеплера и его гиперболический аналог:

$$E - e \sin E = n(t - \tau) \quad e \cdot chH - H = n(t - \tau). \quad (2.80)$$

Орбитальные координаты:

$$\begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e) & \xi &= a(e - chH) \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2} \sin E & \eta &= a\sqrt{e^2-1} shH \\ r &= a(1 - e \cos E) & r &= a(echH - 1). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Скорость движения:

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E} \quad V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{e \cdot chH + 1}{e \cdot chH - 1}. \quad (2.82)$$

Формулы для координат в исходной системе координат в гиперболическом движении согласно с (2.49) и (2.81) будут иметь такой вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (e - chH) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \sqrt{e^2 - 1} \cdot shH \right]. \quad (2.83)$$

Для строгого вывода формул (2.79)–(2.83) нужно в интеграле (2.36) сделать замену переменных (2.79) с учетом (2.33). Заметим также, что именно существование приведенной аналогии и дало основание назвать гиперболические функции гиперболическими, хотя на первый взгляд они ничего общего с гиперболой не имеют. Формально переход в (2.79) – (2.83) от левых формул к правым можно осуществить, если считать, что отрицательным значениям большой полуоси a соответствует воображаемый эллипс с мнимой малой полуосью ib (тогда уравнение эллипса (2.28)

переходит в уравнение гиперболы) и подставить указанные значения полуосей в формулы для эллиптического движения.

Для вычисления интеграла (2.36) можно также сделать замену

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} \frac{F}{2} \quad (2.84)$$

и найти все характеристики гиперболического движения как функции переменной F , однако при этом такой полной формальной аналогии со случаем эллиптического движения уже не будет.

Из (2.82) вытекает, что тогда, когда точка, двигаясь по гиперболе, удаляется на бесконечность, ее скорость стремится к отличной от 0 величине:

$$V_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad (2.85)$$

– это так называемый *гиперболический избыток скорости*.

Гиперболическое движение имеет место тогда, когда метеорное тело входит в сферу действия Земли или другой планеты с некоторой относительной скоростью; при полете космического аппарата к другой планете на припланетных участках его траектории: при более или менее тесном сближении звезд. Вероятность такого сближения для большинства звезд Галактики крайне мала, но в звездных скоплениях и вблизи центра Галактики это может быть уже не так. Конечным эффектом такого сближения будет только изменение направления относительного движения звезд. Это изменение направления равняется углу между асимптотами гиперболы, по которой одна звезда огибает другую. Можно найти величину этого угла в зависимости от гиперболического избытка и прицельного расстояния (расстояния между фокусом гиперболы и ее асимптотой, см. задачу 2.16).

Наконец остановимся на таком, сугубо теоретическом, но интересном вопросе. В каждом конкретном случае гиперболического движения точка описывает лишь одну определенную ветвь гиперболы. Какой же смысл имеет в задаче двух тел существование другой ветви при действии именно силы притяжения? Ответ может быть дан такой (убедиться в этом предоставляем читателю самому): точка будет двигаться по другой ветви гиперболы, если перейти от вещественных значений времени t к мнимым его значениям it .

2.2.3. Круговое движение. Круговое движение имеет место тогда, когда $c \neq 0, \lambda = 0, h < 0$. Формально круговое движение является частным случаем эллиптического движения при эксцентриситете $e=0$. Но при этом фиксированное значение приобретает не только этот элемент орбиты. У круговой орбиты отсутствуютperiцентр и апоцентр, поэтому теряет свой смысл periцентровое расстояние ω . В качестве точки, от которой можно отсчитывать угол, фиксирующий положение материальной точки на круговой орбите, можно взять восходящий узел орбиты. В этом случае истинная аномалия ν совпадает с аргументом широты ι . С другой стороны, ей теперь равны и эксцентрическая аномалия E , и средняя аномалия M . Не

имеют смысла и векторные элементы орбиты в их общем виде. Круговое движение задается четырьмя элементами орбиты, в качестве каковых можно взять радиус орбиты r , долготу узла Ω , наклонение орбиты i и момент прохождения точки через восходящий узел τ (или среднюю аномалию M_0 в начальную эпоху t_0). Координаты точки на круговой орбите согласно (2.45) равны:

$$\begin{aligned}x &= r(\cos\Omega\cos M - \sin\Omega\sin M \cos i), \\y &= r(\sin\Omega\cos M + \cos\Omega\sin M \cos i), \\z &= r \sin M \sin i,\end{aligned}\quad (2.86)$$

где

$$M = n(t - \tau) = n(t - t_0) + M_0, \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{r^{3/2}}. \quad (2.87)$$

Из последнего равенства вытекает третий закон Кеплера для кругового движения и выражение для линейной скорости движения:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{3/2}, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}. \quad (2.88)$$

Поскольку всегда действуют какие-либо возмущающие факторы, то в чистом виде круговое движение в природе не реализуется. Но оно имеет большое значение как простое приближение для описания эллиптического движения с достаточно малым эксцентриситетом.

2.2.4. Параболическое движение. Условия существования этого типа движения таковы: $c \neq 0, \lambda = \mu, h = 0$. Закон движения (2.36) имеет теперь следующий вид, так как эксцентриситет $e = 1$:

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + \cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (2.89)$$

Перейдем от $\cos v$ к $\operatorname{tg}(v/2)$ по известной формуле

$$\cos v = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}} \quad (2.90)$$

и получим, что

$$\int_0^v \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) \sec^2 \frac{v}{2} dv = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (2.91)$$

Сделав замену $\sigma = \operatorname{tg}(v/2)$, а также заменив параметр орбиты p на $2q$, где q – расстояние от вершины параболы (periцентра орбиты) до ее фокуса, будем иметь после интегрирования:

$$\sigma^3 + 3\sigma - 3n(t - \tau) = 0, \quad (2.92)$$

где

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{2}} q^{-3/2}. \quad (2.93)$$

Левая часть кубического уравнения (*уравнения Баркера*) – монотонная функция аргумента σ , ибо ее производная, равная $3(\sigma^2 + 1)$, всюду

положительна. А когда значение $\sigma \rightarrow \pm\infty$, то и эта функция также стремится к $\pm\infty$. Поэтому уравнение (2.92) всегда имеет только один вещественный корень. Найдя этот корень тем или иным приближенным численным способом, возьмем его в качестве новой независимой переменной. Подставляя его в уравнение орбиты (2.26), получим, что

$$r = q(1 + \sigma^2). \quad (2.94)$$

Вспоминая формулу

$$\sin v = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}}, \quad (2.95)$$

находим орбитальные координаты:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos v = q(1 - \sigma^2), \\ \eta &= r \sin v = 2q\sigma. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Наконец, преобразование (2.49) дает:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (1 - \sigma^2) + 2 \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sigma \right]. \quad (2.97)$$

Еще раз напомним, что в параболическом движении модуль скорости определяется формулой

$$V^2 = \frac{2\mu}{r}, \quad (2.98)$$

из которой видно, что тогда, когда точка удаляется по параболе на бесконечность, ее скорость стремится к нулю.

Параболическое движение отделяет эллиптическое движение от гиперболического и из-за наличия возмущений также в действительности не имеет места. Но оно используется при рассмотрении эллиптического и гиперболического движений при значениях эксцентриситета достаточно близких к 1, в частности, при изучении движения комет (см. задачу (2.17)).

2.2.5. Прямолинейное движение. Это движение имеет место тогда, когда кинетический момент $c = 0$, тогда в силу (2.22) $\lambda = \mu$, а удвоенная полная энергия h может иметь произвольное значение. Уравнение орбиты (2.26) уже не пригодно. Но записать уравнение прямой, которая будет траекторией, можно следующим образом. Эта прямая должна проходить через начало координат, ибо $\vec{r} \uparrow \dot{\vec{r}}$, то есть через точку $(0,0,0)$, и может иметь в качестве направляющего вектора начальный вектор \vec{r}_0 . Поэтому векторное уравнение траектории $\vec{r}_0 \times \vec{r} = 0$, а скалярные уравнения –

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}. \quad (2.99)$$

Закон движения по этой траектории можно получить, проинтегрировав интеграл энергии, ибо в данном случае $V^2 = \dot{r}^2$. Интегрирование упростится,

если сделать такую замену переменных: $\sqrt{|h|}dt = \sqrt{\mu/a}dt = rd\eta$, где $a = \mu/|h|$, η – новая безразмерная переменная. Получим, что

$$\eta = \int \frac{dr}{\sqrt{2ar + \text{sign}(h) \cdot r^2}}. \quad (2.100)$$

Вычисляя этот интеграл, находим:

$$\begin{aligned} a(1 - \cos\eta), & \quad h < 0, \\ r = \frac{a}{2}\eta^2, & \quad h = 0, \\ a(ch\eta - 1), & \quad h > 0. \end{aligned} \quad (2.101)$$

при этом время t связано с аргументом η таким образом:

$$\begin{aligned} \eta - \sin\eta & \quad h < 0, \\ \frac{\eta^3}{6} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t - t_0), & \quad h = 0, \\ sh\eta - \eta & \quad h > 0. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Видим, что переменная η является предельным значением эксцентрической аномалии E и ее гиперболического аналога H , если сделать предельный переход $e \rightarrow 1$ при постоянном значении величины a . При этом первое и третье соотношения в (2.102) – это предельные формы уравнения Кеплера и его гиперболического аналога. Постоянная a является предельным значением большой полуоси эллипса или вещественной полуоси гиперболы и при $h < 0$ равна максимально возможному значению r . Заметим только, что выражение (2.101) получено при начальном условии $r_0 = 0$, в общем же случае следует к правым частям (2.101) прибавить величину r_0 .

Решение (2.101) – (2.102) может описывать не только движение одной материальной точки в ньютоновском поле тяготения, но и описывать эволюцию сферически-симметричного пылевого облака. Такую же математическую форму имеет и известное решение уравнений Эйнштейна общей теории относительности (ОТО), полученное А. А. Фридманом для однородного и изотропного мира, заполненного пылеподобным веществом (нужно только заменить величину $\sqrt{\mu/a}$ на скорость света c). Этот факт является следствием того, что классическая механика – это предельный случай ОТО, но он не означает, что эволюцию Вселенной можно описать в рамках ньютоновской механики, ибо решение (2.101) – (2.102) в ОТО имеет совсем другой физический смысл (в классическом случае речь идет о движении отдельных материальных точек в пространстве, а в ОТО – об изменении метрики (в частности, расширении) самого пространства).

Задачи к главе II

2.1. Получить дифференциальное уравнение орбиты в задаче двух тел

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + u = \frac{1}{p},$$

где $u = 1/r$.

2.2. Найти фокальный параметр и эксцентриситет кеплеровской орбиты, если известны начальный радиус r_0 , начальная скорость V_0 и угол α_0 между ними.

2.3. Выразить кеплеровские элементы орбиты через постоянные первых интегралов.

2.4. Какой угол образует вектор скорости с радиусом-вектором в точке с заданным значением r на кеплеровской орбите с большой полуосью a и эксцентриситетом e ?

2.5. Найти радиус r и скорость V по начальным значениям r_0, V_0 и угла δ_0 между соответствующими векторами в тот момент, когда этот угол равен δ .

2.6. Найти среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое наибольшего и наименьшего значений расстояния r для точки, движущейся по эллиптической орбите.

2.7. Доказать “правило рычага” – $r_a V_a = r_\pi V_\pi$, где r_a, r_π, V_a, V_π – расстояния и скорости движения по эллиптической орбите в апоцентре иperiцентре.

2.8. Найти начальную скорость ракеты V_0 , необходимую для подъема на высоту H над поверхностью планеты радиуса R , если на поверхности планеты ускорение силы тяжести равно g . Записать приближенные формулы для случаев: а) $H \ll R$ и б) $H \gg R$.

2.9. Спутник движется по орбите с эксцентриситетом e . Какова будет его скорость в точке с истинной аномалией v , если круговая скорость в этой точке равна V_0 ?

2.10. Доказать, что период обращения спутника, движущегося непосредственно над поверхностью планеты, зависит только от средней плотности планеты.

2.11. Доказать, что гелиоцентрическая орбита Луны всюду вогнутая кривая. Считать, что геоцентрическое движение Луны и гелиоцентрическое движение Земли происходят по компланарным круговым орбитам.

2.12. Доказать, что геоцентрическое движение любой планеты имеет эпициклический характер, то есть должны иметь место попутное движение и точки стояния планеты.

2.13. Записать уравнение движения в задаче двух тел в комплексной форме. Доказать, что произведение скоростей в двух точках эллиптической орбиты, симметричных относительно ее центра, не зависит от положения этих точек на орбите.

2.14. Найти годограф скорости в эллиптическом движении.

2.15. Найти круговую и параболическую скорости в экваториальной плоскости тела с потенциалом (1.21).

2.16. Найти угол между асимптотами гиперболы, по которой огибает притягивающий центр материальная точка, имеющая на бесконечности скорость V_∞ и прицельное расстояние b .

2.17. Комета движется по эллиптической орбите с очень большой полуосью a и близким к 1 эксцентриситетом. Это движение при приближении кометы к Солнцу, начиная с точки, в которой радиус-вектор кометы перпендикулярен большой оси ее орбиты, рассматривается как происходящее по параболической орбите. Какие ошибки возникают при вычислении наименьшего расстояния кометы от Солнца и ее скорости в той точке?

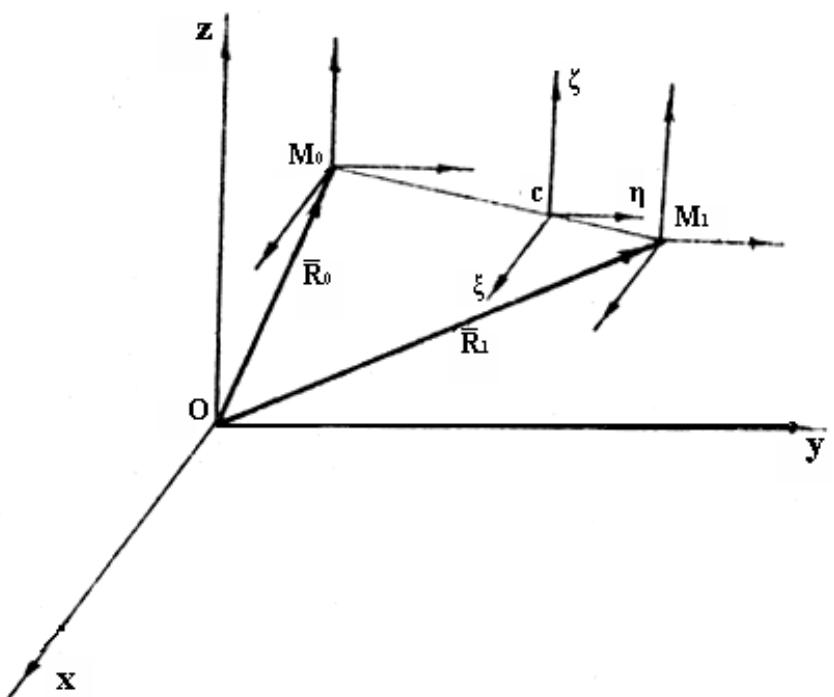


Рис. 2.1. Задача двух тел в инерциальной и барицентрической системах координат

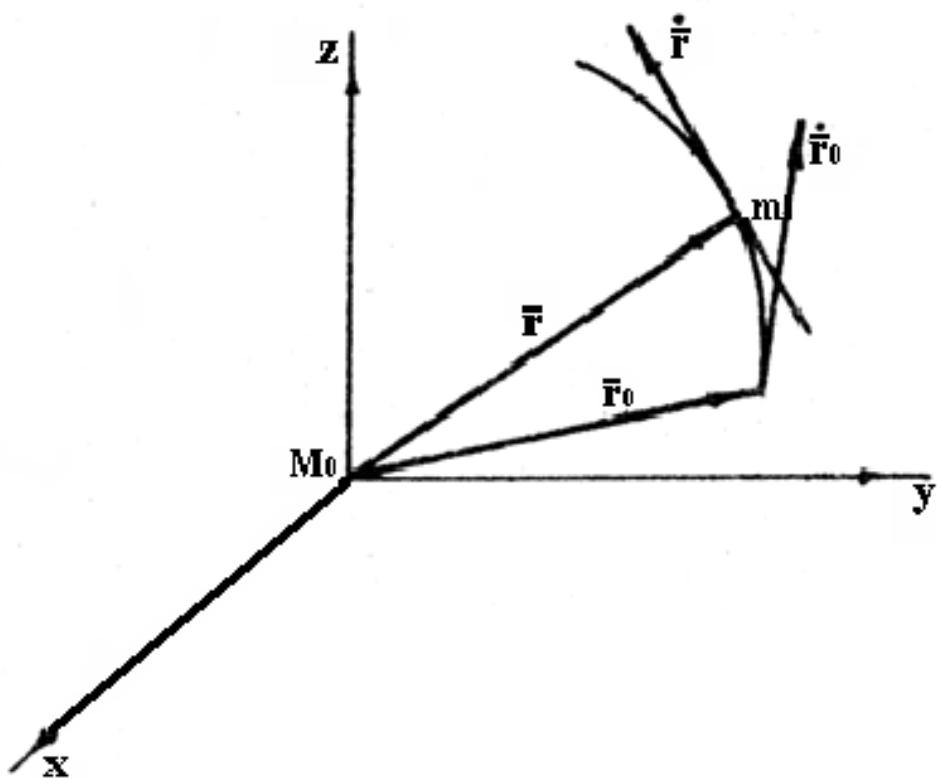


Рис. 2.2. Относительная задача двух тел

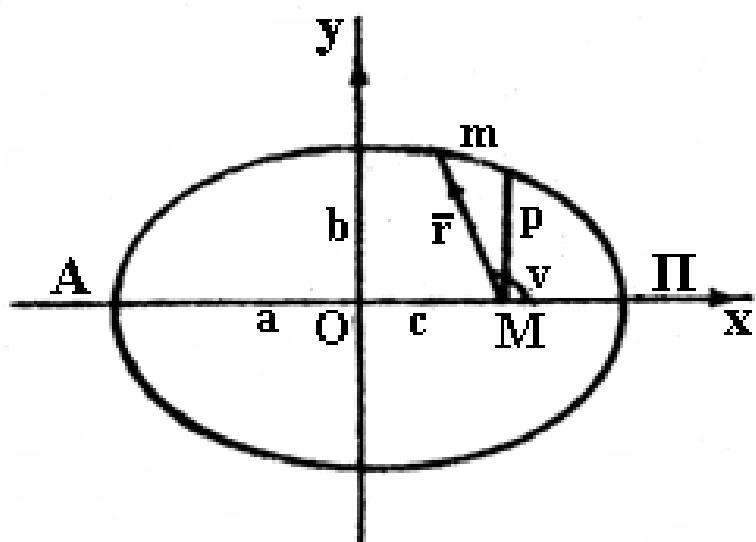


Рис. 2.3. Движение точки по эллиптической орбите

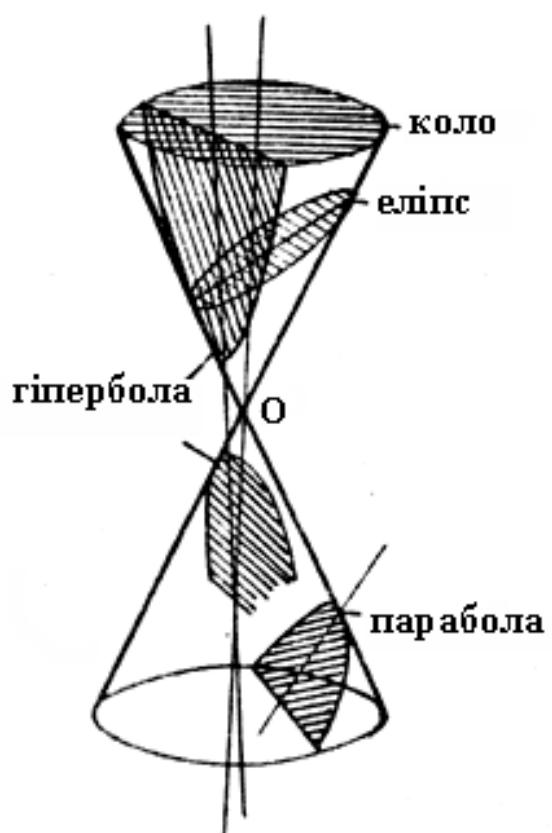


Рис. 2.4. Конусные сечения

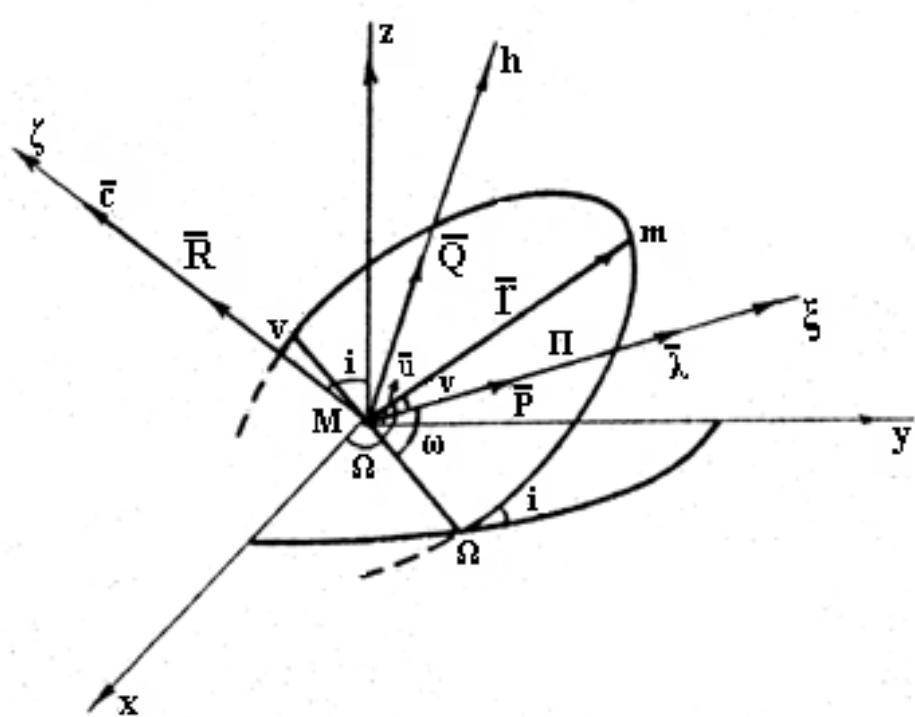


Рис. 2.5. Орбитальная система координат и углы Эйлера

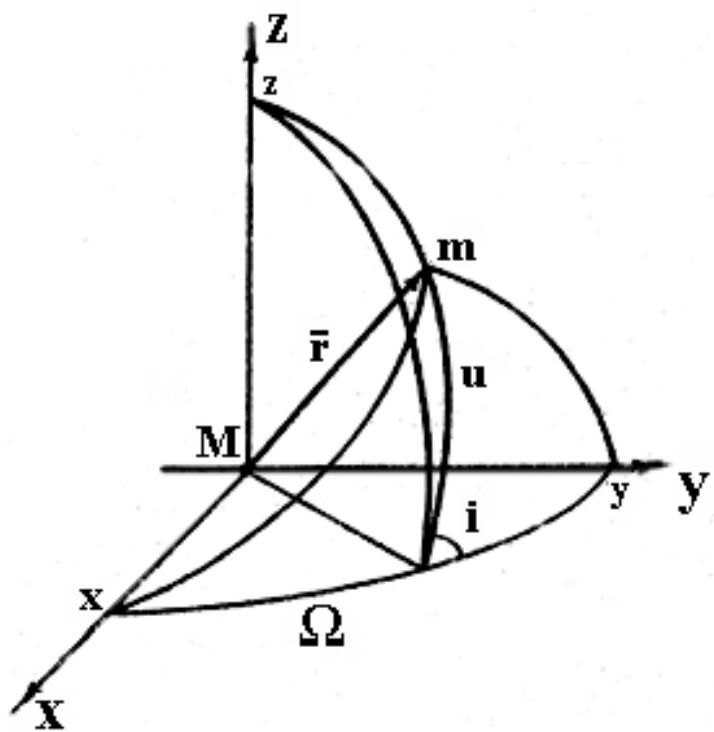


Рис. 2.6. Вычисление направляющих косинусов радиуса-вектора

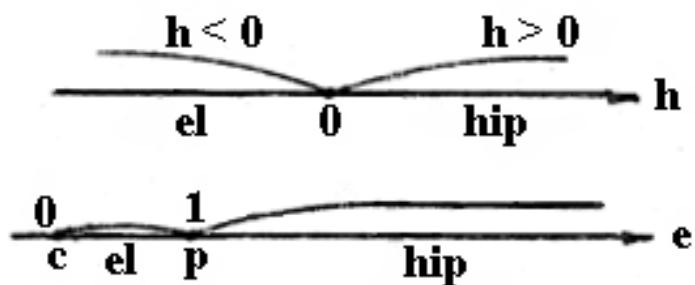


Рис. 2.7. Вероятность различных типов кеплеровского движения

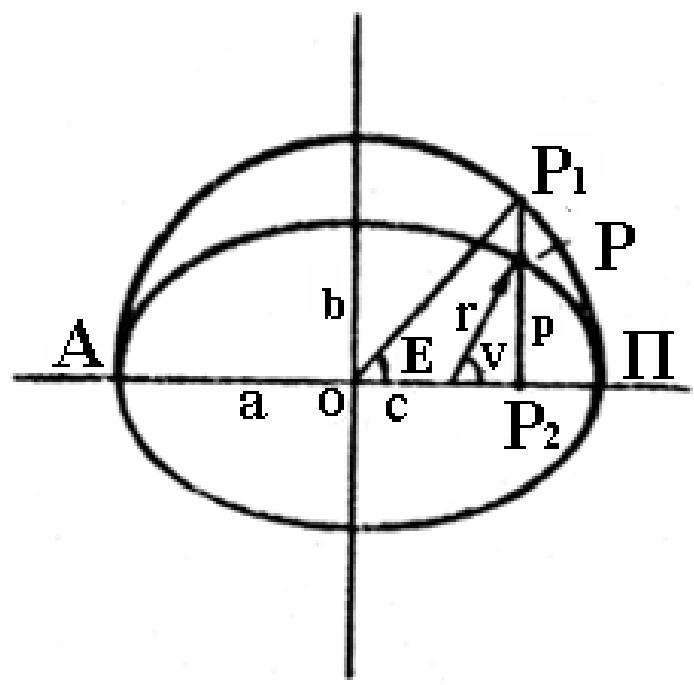


Рис. 2.8. Эксцентрическая аномалия

Глава III. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

В этой главе мы рассмотрим некоторые дополнительные вопросы теории невозмущенного кеплеровского движения – это ряды эллиптического движения, краевую задачу и проблему определения орбит, интегрирование задачи двух тел методом Гамильтона–Якоби, а также ряд обобщений классической задачи двух тел – задачу о движении под действием центральной силы, релятивистскую задачу двух тел и задачу двух тел в пространствах с произвольным числом измерений.

3.1. Ряды эллиптического движения

Название этого подраздела также является данью тем традиционным особенностям терминологии в небесной механике, о которых уже шла речь ранее. Конечно, мы займемся разложением в функциональные ряды не самого эллиптического движения, а его количественных характеристик, и прежде всего, эксцентрической аномалии как решения уравнения Кеплера. Постановка такой задачи связана с тем, что уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = M \quad (3.1)$$

является трансцендентным уравнением, и эксцентрическая аномалия не может быть найдена как элементарная функция аргументов M и e .

Заметим, что достаточно широко распространены случаи (большие и большинство малых планет, естественные спутники планет и, как правило, искусственные спутники Земли), когда эксцентриситет орбиты весьма мал – $e \ll 1$. В этих случаях эффективным способом решения уравнения Кеплера служит его численное решение методом итераций. При этом следующее приближение ищется по предыдущему по формуле:

$$E_{n+1} = e \sin E_n + M. \quad (3.2)$$

В качестве начального приближения E_0 берется значение средней аномалии M . Модуль производной от правой части (3.2) $|e \cos E| \leq e < 1$, то есть достаточное условие сходимости итерационного процесса выполняется, а малость e делает этот процесс сходимости очень быстрым. При этом метод итераций для уравнения Кеплера может быть реализован даже на непрограммируемых калькуляторах без промежуточных записей. Для уменьшения количества итераций можно брать как начальное приближение приближенное решение уравнения Кеплера из соответствующих таблиц (см., например, [39]). Однако в целом ряде прикладных, а особенно теоретических задач, полезно иметь решение уравнения Кеплера в пусть приближенной, но аналитической форме. В этой связи наличие малого параметра $e \ll 1$ приводит к мысли о поиске такого решения в виде ряда по степеням эксцентриситета e . При этом коэффициенты такого ряда будут функциями средней аномалии M . В то же время эксцентрическая аномалия E – это периодическая функция средней аномалии M . Это обстоятельство позволяет

ставить задачу о разложении величины E в ряд Фурье по средней аномалии (соответственно коэффициенты Фурье будут функциями эксцентриситета e).

3.1.1. Решение уравнения Кеплера. Для того, чтобы иметь решение уравнения Кеплера в виде степенного ряда

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} E_k e^k, \quad (3.3)$$

необходимо найти коэффициенты этого ряда E_k , которые, как известно, определяются следующим образом

$$E_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k E(e)}{de^k} \Big|_{e=0}. \quad (3.4)$$

Однако вычисление производной произвольного порядка, которая стоит в выражении (3.4), сталкивается со значительными трудностями в связи с тем, что эксцентрисическая аномалия E как функция эксцентриситета e задана уравнением Кеплера как неявная функция. Преодолеть эти трудности помогает *теорема Лагранжа* из теории аналитических функций. Эта теорема формулируется следующим образом.

Если в уравнении

$$z - \alpha \cdot f(z) = a \quad (3.5)$$

постоянные α и a имеют такие значения, что в некоторой области плоскости z выполняется условие

$$\left| \frac{\alpha \cdot f(z)}{z - a} \right| < 1, \quad (3.6)$$

то корень уравнения (3.5) существует и равен

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [(f(a))^k]. \quad (3.7)$$

Ряд Лагранжа (3.7) сходится абсолютно для любого a из области, в которой выполняется условие (3.6). Доказательство теоремы Лагранжа можно провести методом полной математической индукции (см. задачу 3.3, а также [30]). Теорема Лагранжа имеет *обобщение*, позволяющее найти степенной ряд для любой аналитической функции $\Phi(z)$, аргумент которой является корнем уравнения (3.5), а именно:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [\Phi'(a) \cdot (f(a))^k]. \quad (3.8)$$

Это позволяет найти разложение в ряд Маклорена не только эксцентрисической аномалии, а и других характеристик эллиптического движения, зависящих от нее. Основная проблема состоит теперь в том, чтобы найти радиус сходимости этих рядов из условия

$$|e| < \left| \frac{E - M}{\sin E} \right|, \quad (3.9)$$

вытекающего в нашем случае из общего условия (3.6).

Условие (3.9) определяет область, в которой функция $E(e)$, как решение уравнения Кеплера (3.1), будет аналитической функцией, а значит, будет

существовать производная dE/de при всех значениях E и e из этой области. Вычисляя эту производную из уравнения Кеплера, получим:

$$\frac{dE}{de} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E}. \quad (3.10)$$

Отсюда для радиуса сходимости рядов (3.7) и (3.8) найдем такую систему уравнений:

$$\begin{aligned} E - e \sin E &= M, \\ 1 - e \cos E &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

При этом нам нужно найти наименьший по модулю корень e этой системы. Из второго уравнения имеем, что $e = 1/\cos E$. Соответственно,

$$|e|^2 = 1/(\cos E \cdot \cos \bar{E}), \quad (3.12)$$

где \bar{E} означает комплексно сопряженную величину, при этом учтено то, что косинус – это четная функция. Таким образом, нам теперь нужно найти максимум функции $\cos E \cdot \cos \bar{E}$. Ее производная равняется

$$-(\sin E \cos \bar{E} + \cos E \sin \bar{E}) = -\sin(E + \bar{E}). \quad (3.13)$$

Если положить $E = \rho + i\sigma$, то производная будет равна $-\sin 2\rho$, а наименьший корень уравнения $\sin 2\rho = 0$, отличный от нуля, есть $\pi/2$. Подставим теперь $E = \pi/2 + i\sigma$ в уравнение Кеплера:

$$\frac{\pi}{2} + i\sigma - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma\right)} = M. \quad (3.14)$$

Учитывая формулы приведения и связь между тригонометрическими функциями мнимого аргумента и гиперболическими функциями вещественного аргумента, получим:

$$\frac{\pi}{2} + i\sigma + \frac{\cos i\sigma}{\sin i\sigma} = \frac{\pi}{2} + i\left(\sigma - \frac{ch\sigma}{sh\sigma}\right) = M. \quad (3.15)$$

Так как нас интересуют только вещественные значения средней аномалии M , то для определения коэффициента σ имеем уравнение:

$$\sigma \cdot sh\sigma - ch\sigma = 0. \quad (3.16)$$

Нетрудно убедиться, что корень этого уравнения лежит между 1 и 2. Более точное его значение $\sigma_0 = 1.1997$. Теперь окончательно находим, что радиус сходимости рядов Лагранжа

$$e_0 = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma_0\right)} = \frac{1}{sh\sigma} = 0.6627. \quad (3.17)$$

Значение эксцентриситета e_0 называется *пределом Лапласа*, который впервые нашел его, хотя и другим путем. При значениях эксцентриситета, меньших e_0 , ряды Лагранжа сходятся абсолютно, а при больших значениях e они могут даже расходиться, по крайней мере, при некоторых значениях средней аномалии M . При значениях эксцентриситета, меньших предела Лапласа, но близких к нему, может значительно замедляться скорость сходимости этих рядов.

Перейдем к отысканию явного вида ряда (3.3). Из (3.7) имеем, что

$$E_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} (\sin^k M). \quad (3.18)$$

Если провести вычисления по формуле (3.18), то получим для коэффициентов E_k выражения в виде полиномов от степеней $\sin M$ и $\cos M$. Но, как известно, с помощью тождества

$$(\cos M + i \sin M)^n = \cos nM + i \sin nM \quad (3.19)$$

можно выразить степени $\sin^n M$ и $\cos^n M$ через синусы и косинусы аргументов, кратных M , то есть kM . Поэтому коэффициенты E_k можно рассматривать как тригонометрические многочлены от аргументов, кратных средней аномалии M . В частности, из (3.18) следует, что

$$E_0 = M, \quad E_1 = \sin M, \quad E_2 = \frac{1}{2} \sin 2M. \quad (3.20)$$

Соответственно, решение уравнения Кеплера имеет такой вид:

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \dots. \quad (3.21)$$

3.1.2. Степенные ряды эллиптического движения. Чтобы получить ряды для различных характеристик эллиптического движения, нужно иметь ряды для $\cos E$ и $\sin E$, то-есть

$$\cos E = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^k, \quad \sin E = \sum_{k=0}^{\infty} S_k e^k. \quad (3.22)$$

Воспользовавшись обобщенным рядом Лагранжа (3.8), получим, что

$$C_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} (-\sin^{k+1} M). \quad (3.23)$$

Вычисляя первые коэффициенты C_k , найдем, что

$$\cos E = \cos M + \frac{e}{2} (\cos 2M - 1) + \frac{3}{8} e^2 (\cos 3M - \cos M) + \dots. \quad (3.24)$$

Для определения коэффициентов S_k нет необходимости обращаться к ряду (3.8), ибо из уравнения Кеплера вытекает, что

$$\sin E = \frac{E - M}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k e^{k-1} - \frac{M}{e}. \quad (3.25)$$

Сравнивая второй из рядов (3.22) с (3.25), можно убедиться, что коэффициенты

$$S_k = E_{k+1}. \quad (3.26)$$

Таким же образом будем действовать и дальше, то есть выражать коэффициенты последующих рядов через коэффициенты *основных рядов* E_k и C_k – рядов для самой эксцентрической аномалии и ее косинуса. Так как коэффициенты основных рядов безразмерны, то и другие величины мы будем записывать в безразмерном виде. Тогда уравнение орбиты (2.59) будет иметь вид:

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E. \quad (3.27)$$

Если записать ряд

$$\frac{r}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} R_k e^k, \quad (3.28)$$

то, сравнивая (3.27) и (3.28), получим, что

$$R_k = C_{k-1} \quad (k \neq 0), \quad R_0 = 1. \quad (3.29)$$

Безразмерные орбитальные координаты есть:

$$\frac{\xi}{a} = \cos E - e, \quad \frac{\eta}{a} = \sqrt{1-e^2} \sin E. \quad (3.30)$$

Обозначим степенные ряды для них таким образом:

$$\frac{\xi}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \Xi_k e^k, \quad \frac{\eta}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k e^k. \quad (3.31)$$

Сравнивая выражения для ξ/a , легко увидеть, что

$$\Xi_k = C_k \quad (k \neq 1), \quad \Xi_1 = C_1 - 1. \quad (3.32)$$

Чтобы найти коефициенты H_k , нужно вспомнить, что из общего вида биномиального ряда для $(1+x)^m$ при $m=1/2$ следует ряд

$$\sqrt{1-e^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^k, \quad (3.33)$$

где

$$\alpha_0, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{2j} = (-1)^j \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}, \quad \alpha_{2j+1} = 0.$$

Перемножая абсолютно сходящиеся ряды (3.22) и (3.33), получим, что

$$H_k = \sum_{s=0}^k \alpha_s S_{k-s} = \sum_{s=0}^k \alpha_s E_{k-s+1}. \quad (3.34)$$

Записывая ряды для координат в исходной координатной системе

$$\frac{x}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k e^k, \quad \frac{y}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k e^k, \quad \frac{z}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k e^k \quad (3.35)$$

и сравнивая их с соотношением (2.46), находим:

$$\begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \Xi_k + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot H_k. \quad (3.36)$$

Чтобы найти ряд для безразмерного квадрата скорости, запишем с помощью (2.65) интеграл энергии (2.74) в следующем виде:

$$\left(\frac{V}{na} \right)^2 = 2 \cdot \frac{a}{r} - 1. \quad (3.37)$$

Теперь видно, что нужно найти ряд для обратого расстояния

$$\frac{a}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{R}_k e^k. \quad (3.38)$$

Дифференцируя уравнение Кеплера по M , получим:

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E} = \frac{a}{r}, \quad (3.39)$$

поэтому коэффициенты

$$\tilde{R}_k = \frac{dE_k}{dM}, \quad (3.40)$$

а если записать ряд

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} V_k^{(2)} e^k, \quad (3.41)$$

то коэффициенты этого ряда окажутся такими:

$$V_k^{(2)} = 2\tilde{R}_k \quad (k \neq 0), \quad V_0^{(2)} = 1. \quad (3.42)$$

Наконец, используя соотношения

$$\frac{V_n}{na} = \frac{r\dot{v}}{na} = \frac{\sqrt{\mu p}}{nar} = \frac{a}{r} \cdot \sqrt{1 - e^2} \quad (3.43)$$

и

$$\frac{\dot{v}}{n} = \frac{V_n}{nr} = \frac{a}{r} \cdot \frac{V_n}{na} \quad (3.44)$$

и перемножая соответствующие ряды, а затем проинтегрировав полученное произведение по времени, можно получить ряд для истинной аномалии, который имеет название *уравнения центра*:

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k e^k. \quad (3.45)$$

Первые его члены таковы:

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots. \quad (3.46)$$

В справочнике [38] можно найти полученные выше и некоторые другие степенные ряды эллиптического движения с точностью до e^7 включительно.

3.1.3. Тригонометрические ряды эллиптического движения. Степенные ряды в связи с их областью сходимости эффективны практически лишь при значениях эксцентриситета $e \ll 1$. Поэтому возникает потребность в нахождении рядов, сходящихся при всех значениях эксцентриситета ($0 < e < 1$). Такими рядами являются ряды Фурье по средней аномалии M , к рассмотрению которых мы и перейдем.

Эксцентрическая аномалия и зависящие от нее другие характеристики эллиптического движения являются периодическими функциями средней аномалии, ибо эксцентрическая аномалия E входит во все формулы лишь под знаком синуса или косинуса. Кроме того, из уравнения Кеплера и последующих формул для эллиптического движения вытекает, что разность $E - M$ и величины r , ξ , η – это или четные, или нечетные функции средней аномалии. Для четной периодической функции с периодом 2π ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (3.47)$$

где коэффициенты Фурье

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad (3.48)$$

для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (3.49)$$

коэффициенты Фурье которой

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (3.50)$$

По теореме Дирихле наличие конечных значений интегралов (3.48) и (3.50) – это достаточное условие сходимости рядов (3.47) и (3.49), однако сходимости, вообще говоря, только условной.

Найдем прежде всего коэффициенты Фурье основных рядов – для эксцентрической аномалии и ее косинуса.

Коэффициенты для величины $E - M$ согласно (3.50) суть

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (E - M) \sin kM dM. \quad (3.51)$$

Так как уравнение Кеплера задает величину E как неявную функцию аргумента M , а M , наоборот, как явную функцию E , перейдем в интеграле (3.51) к переменной интегрирования E . Это удобнее сделать, если предварительно проинтегрировать (3.51) по частям. Тогда

$$b_k = \frac{2}{k\pi} \left[-(E - M) \cos kM \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos kM (dE - dM) \right] = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos(kE - ke \sin E) dE. \quad (3.52)$$

Если вспомнить известную интегральную формулу для *функций Бесселя*

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (k\varphi - x \sin \varphi) d\varphi, \quad (3.53)$$

то увидим, что коэффициенты

$$b_k = \frac{2}{k} J_k(ke), \quad (3.54)$$

а ряд Фурье для эксцентрической аномалии имеет такой вид:

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM. \quad (3.55)$$

Аналогично, интегрируя по частям выражение для коэффициентов Фурье функции $\cos E$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos E \cos kM dM, \quad (3.56)$$

находим, что

$$a_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(kE - ke \sin E) \sin EdE. \quad (3.57)$$

Переходя от произведения синусов к разности косинусов, находим, снова принимая во внимание (3.53), что

$$a_k = \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)]. \quad (3.58)$$

Выражение (3.58) не пригодно при $k=0$, но в этом случае прямое интегрирование (3.56) показывает, что $a_0 = -e$. Соответственно,

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM . \quad (3.59)$$

Теперь можно получить и другие ряды Фурье для эллиптического движения. В частности,

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 + \frac{e^2}{2} - e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM , \\ \frac{\xi}{a} &= -\frac{3}{2} e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM , \\ \frac{\eta}{a} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM . \end{aligned} \quad (3.60)$$

Как известно, функции Бесселя разлагаются в абсолютно сходящиеся степенные ряды, а именно:

$$J_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2j}}{k!(k+j)!} . \quad (3.61)$$

Полагая $x = ke$, подставим ряд (3.61) в ряды (3.55), (3.59) и (3.60). Собирая вместе члены с одинаковыми степенями эксцентризитета e , получим ряды по степеням e , коэффициентами которых будут тригонометрические многочлены от $\sin kM$ и $\cos kM$. И наоборот, собирая в соответствующих степенных рядах пункта 3.1.2 члены с одинаковыми значениями аргументов при синусах и косинусах, можно преобразовать эти ряды в ряды Фурье с коэффициентами в виде степенных рядов по аргументу e . Но эти преобразования без нарушения сходимости рядов к тому же самому значению их суммы можно делать только для абсолютно сходящихся рядов, то есть таких рядов, для которых сходится ряд, составленный из модулей их членов. Если же ряд сходится только условно, иначе говоря, его сходимость обеспечивается частичной взаимной компенсацией членов с противоположными знаками, то перестановка бесконечного числа членов такого ряда может привести к изменению суммы ряда или даже к получению расходящегося ряда. Эти соображения приводят к новому взгляду на предел Лапласа e_0 . Он оказывается границей между областями *абсолютной* и *условной* сходимостей рядов Фурье эллиптического движения. При значениях эксцентризитета $e < e_0$ ряды Фурье сходятся абсолютно, поэтому и полученные из них ряды по степеням e также сходятся – и при этом абсолютно. А при значениях $e > e_0$ ряды Фурье тоже сходятся, но только условно. Поэтому соответствующие ряды по степеням эксцентризитета могут быть расходящимися, по крайней мере, при некоторых значениях средней аномалии M .

3.2. Краевая задача двух тел. Определение орбит. Задачу двух тел можно решать как по начальным, так и по краевым условиям. Задача нахождения элементов орбиты по начальным условиям (или, как говорят, *определения орбиты*) по сути уже рассмотрена в предыдущей главе. Из выражений для

первых интегралов находятся постоянные первых интегралов. Потом на основе формул (2.27) и (2.36) находятся элементы e , p и τ . Что касается элементов Ω , ω , i , то см. задачу 2.2. Исчерпывающе эта задача рассмотрена в книгах Г. М. Дубошина [17] и М. Ф. Субботина [39].

Что же касается краевой задачи, то прежде всего нужно вспомнить, что астрометрические наблюдения дают лишь направление на небесное тело в виде двух его угловых координат. Поэтому для определения шести элементов орбиты необходимо по крайней мере три наблюдения (только в случае круговой орбиты достаточно двух наблюдений). Но перед тем, как собственно решать задачу определения элементов орбиты, нужно получить краевые условия, то-есть значения радиусов-векторов $\vec{r}_{1,2}$ в моменты времени $t_{1,2}$ по значениям угловых координат, как правило, экваториальных α_k , β_k в моменты t_k , где $k = 1, 0, 2$ (средний момент времени удобно обозначить как t_0). Для этого используется прежде всего априорная информация о том, что три точки \vec{r}_k лежат на некоторой кривой второго порядка и во времени связаны между собой вторым законом Кеплера.

В основе *метода Гаусса* определения эллиптической орбиты по трем наблюдениям лежит следующая идея. Так как радиусы-векторы лежат в одной плоскости, то они линейно связаны между собой, то есть $\vec{r}_0 = c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2$, где коэффициенты $c_{1,2}$ равны отношениям площадей соответствующих треугольников, образованных векторами \vec{r}_k . В то же время второй закон Кеплера дает нам отношения площадей соответствующих эллиптических секторов. Возникает задача нахождения отношения площади треугольника к площади эллиптического сектора – задача достаточно сложная, ибо площадь эллиптического сектора не выражается в конечном виде через координаты его вершин. В первом приближении эта задача решается в предположении, что движение происходит по круговой орбите. Это допустимо тогда, когда, как это бывает при определении орбит малых планет, наблюдения охватывают лишь относительно небольшую дугу орбиты и можно ожидать, что значение эксцентриситета не очень большое. Подробно метод Гаусса, как и *метод Ольберса* определения параболической орбиты, рассмотрен в [39]. Алгоритмы методов Гаусса и Ольберса приведены в Приложении 3.

Рассмотрим кратко метод определения орбит, не требующий вышеупомянутого предположения, и поэтому применяемый в астродинамике. Он основан на использовании *теоремы Ламберта*. Эта теорема связывает большую полуось эллиптической орбиты a с радиусами двух точек $r_{1,2}$, длиной хорды между этими точками s и промежутком времени $\Delta t = t_2 - t_1$, во время которого материальная точка в своем движении проходит дугу орбиты между точками $\vec{r}_{1,2}$. При этом придется учитывать, что эта дуга может быть и меньше, и больше 180° , а хорда, соединяющая точки $\vec{r}_{1,2}$, может как пересекать, так и не пересекать большую ось эллипса. Поэтому перед тем, как сформулировать саму теорему Ламберта, нужно

ввести вспомогательную величину a_m – большую полуось граничного эллипса, такого, что хорда P_1P_2 (рис. 3.2 д) проходит через другой фокус эллипса, при этом

$$a_m = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + c). \quad (3.63)$$

Тогда время перелета по этой граничной орбите равно

$$\Delta t_m = \frac{a_m^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [\pi - \text{sign}(\sin\Phi)(\delta - \sin\delta)]. \quad (3.64)$$

Сама же теорема Ламберта имеет следующий вид:

$$\sqrt{\mu}(t_2 - t_1) = a^{3/2} [\pi + \text{sign}(\Delta t_m - \Delta t)(\varepsilon - \sin\varepsilon) - \text{sign}(\sin\Phi)(\delta - \sin\delta)], \quad (3.65)$$

где

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{a_m}{a}}, \quad \sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{a_m - 2c}{a}}, \quad c = \sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2},$$

а Φ – угол между векторами $\vec{r}_{1,2}$, то есть $\Phi = \nu_2 - \nu_1$. При этом $0 < \delta/2 < \varepsilon/2 < \pi/2$, а появление в (3.64) и (3.65) знаковых множителей как раз и связано с теми разными возможностями расположения на орбите точек $\vec{r}_{1,2}$, о которых шла речь выше и которые показаны на рис. 3.2. Детальный анализ этих возможностей, как и доказательство теоремы Ламберта, также содержится в книге [39].

Если известны векторы $\vec{r}_{1,2}$, то величины $\sin\Phi$ и $\cos\Phi$ находятся из модуля векторного произведения этих векторов и их скалярного произведения. Тогда теорему Ламберта можно рассматривать как уравнение относительно большой полуоси a , которое нужно решить каким-либо численным методом. Зная величину a , можно найти параметр орбиты

$$p = \frac{r_1 r_2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{a \sin \frac{\varepsilon - \gamma}{2}}, \quad (3.66)$$

где

$$\gamma = (\text{sign}(\Delta t_m - \Delta t) \cdot \text{sign}(\sin\Phi) \cdot \delta).$$

Формула (3.67) вытекает из соотношения между разностями истинных и эксцентрических аномалий в точках $\vec{r}_{1,2}$ и зависимостью длины хорды c от разности эксцентрических аномалий.

Рассмотрев интеграл момента, интеграл Лапласа и их векторное произведение в точках $\vec{r}_{1,2}$, можно получить следующие выражения для векторных элементов орбиты:

$$\vec{P} = \frac{e + \cos\nu_{1,2}}{p} \vec{r}_{1,2} - \frac{r_{1,2}}{\sqrt{\mu p}} \sin\nu_{1,2} \dot{\vec{r}}_{1,2}, \quad (3.67)$$

$$\vec{Q} = \frac{\sin\nu_{1,2}}{p} \vec{r}_{1,2} + \frac{r_{1,2}}{\sqrt{\mu p}} \cos\nu_{1,2} \dot{\vec{r}}_{1,2}. \quad (3.68)$$

Исключив из этих четырех уравнений скорости $\dot{r}_{1,2}$, находим векторные элементы орбиты, зная которые можно найти и элементы Ω, ω, i .

Заметим, что, исключая из каждой пары уравнений (3.67) и (3.68) векторы \vec{P} и \vec{Q} , можно найти два уравнения, связывающие радиусы-векторы и векторы скорости в два рассматриваемые момента времени. Разрешив полученную систему уравнений относительно радиуса-вектора \vec{r}_2 и вектора скорости $\dot{\vec{r}}_2$, найдем, что

$$\vec{r}_2 = \left[1 - \frac{r_2}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \vec{r}_1 + \frac{r_1 r_2}{\sqrt{\mu p}} \sin \Phi \cdot \dot{\vec{r}}_1, \quad (3.69)$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = + \left[\frac{\vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1}{pr_1} (1 - \cos \Phi) - \frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \Phi \right] \cdot \vec{r}_1 + \left[1 - \frac{r_1}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \dot{\vec{r}}_1. \quad (3.70)$$

Наконец, опуская в (3.69) и (3.70) индекс 2 и заменяя индекс 1 на 0, получим зависимость радиуса-вектора и вектора скорости в произвольный момент времени непосредственно из их начальных значений:

$$\vec{r} = \left[1 - \frac{r}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \vec{r}_0 + \frac{r r_0}{\sqrt{\mu p}} \sin \Phi \cdot \dot{\vec{r}}_0, \quad (3.71)$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = + \left[\frac{\vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0}{pr_0} (1 - \cos \Phi) - \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \Phi \right] \cdot \vec{r}_0 + \left[1 - \frac{r_0}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \dot{\vec{r}}_0, \quad (3.72)$$

где теперь $\Phi = v - v_0$.

Если в теореме Ламберта сделать предельный переход при $a \rightarrow \infty$, получим *теорему Эйлера*, согласно которой

$$6\sqrt{\mu \Delta t} = (r_1 + r_2 + c)^{3/2} - \text{sign}(\Phi)(r_1 + r_2 - c)^{3/2}. \quad (3.73)$$

Эта теорема используется при определении параболических орбит по методу Ольберса. Теоремы Ламберта и Эйлера также используются для вычисления времени перелета между двумя точками по соответствующей орбите.

Вообще же решение задачи об определении орбит искусственных небесных тел, в частности ИСЗ, существенным образом зависит от характера телеметрической информации об их движении. Радиолокационные и светолокационные измерения дают расстояния до ИНТ, а допплеровские – радиальные компоненты скорости. Если еще по угловым координатам и расстоянию найти нормальную компоненту скорости, то задача определения орбиты сводится к задаче Коши (подробнее об этом см. в [42, 46]).

Задачей на стыке небесной механики и звездной астрономии является задача определения орбит в двойных звездных системах. Основные трудности связаны здесь с тем, что мы наблюдаем движение компонентов этих систем лишь в проекции на картинную плоскость. Возможности и пути преодоления этих трудностей зависят от типа двойной системы (см. подробнее об этом в [36, 39]). Еще одной специфической задачей небесной механики является вычисление времени и обстоятельств солнечных и лунных затмений [28].

3.3. Интегрирование задачи двух тел методом Гамильтона–Якоби. Метод первых интегралов, которым были проинтегрированы уравнения задачи двух тел в предыдущей главе, не является единственным возможным. Сейчас мы получим решение этой задачи в сферических координатах методом Гамильтона–Якоби, которое пригодится нам тогда, когда в главе IV начнем изучение возмущенного движения.

Использование именно сферической системы координат целесообразно потому, что тогда потенциал задачи, который равен $V = \mu/r$, зависит лишь от одной координаты. Обозначим угловые координаты как φ и λ , где φ – широта, а λ – долгота. Для применения метода Гамильтона–Якоби нужно прежде всего найти соответствующие выбранным координатам r , λ , φ обобщенные импульсы – R , Λ , Φ . *Обобщенный импульс* p_i , отвечающий обобщенной координате q_i , определяется формулой

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (3.74)$$

где *функция Лагранжа* равняется разности кинетической и потенциальной энергий, или $L = T + V$. Кинетическая энергия в сферических координатах имеет такой вид:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}^2). \quad (3.75)$$

Функция Лагранжа равна

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2) + \frac{\mu}{r}. \quad (3.76)$$

Отсюда находим, что

$$R = \dot{r}, \quad \Phi = r^2\dot{\varphi}, \quad \Lambda = r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}. \quad (3.77)$$

Теперь можно записать *функцию Гамильтона* задачи двух тел, которая равняется в консервативных задачах полной энергии, выраженной через обобщенные координаты и обобщенные импульсы, то-есть

$$H = \frac{1}{2}\left(R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} + \frac{\Lambda^2}{r^2 \cos^2 \varphi}\right) - \frac{\mu}{r}. \quad (3.78)$$

Чтобы записать уравнение Гамильтона–Якоби, следует приравнять к нулю сумму частной производной от *действия* S по времени и функции Гамильтона, в которой обобщенные импульсы заменены на частные производные от действия S по обобщенным координатам (см. [17] или [25]). Но поскольку в консервативных задачах действие может быть записано как

$$S = W(q_i) - \alpha_1 t, \quad (3.79)$$

где W – так называемое усеченное действие, то уравнение Гамильтона–Якоби будет иметь следующий вид:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (3.80)$$

Далее нам необходимо найти полный интеграл этого уравнения, то есть такой его интеграл, который, в отличие от общего, зависит не от трех произвольных функций, а лишь от трех произвольных постоянных. Будем искать его путем разделения переменных, то есть в виде

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\lambda). \quad (3.81)$$

Подставляя (3.81) в (3.80), получим:

$$\left(\frac{dW_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dW_2}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{dW_3}{d\lambda} \right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (3.82)$$

Если положить

$$\frac{dW_3}{d\varphi} = \alpha_3, \quad \text{а} \quad \left(\frac{dW_2}{d\varphi} \right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi} = \alpha_2^2, \quad (3.83)$$

получим:

$$\left(\frac{dW_1}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (3.84)$$

Отсюда усеченное действие

$$W = \alpha_3 \lambda + \int \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi + \int \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr. \quad (3.85)$$

Общее решение задачи дается теперь соотношениями

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (3.86)$$

которые в нашем случае дают следующее:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = t + \alpha_1, \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \alpha_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} - \alpha_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2, \quad (3.88)$$

$$\lambda - \alpha_3 \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} = \beta_3. \quad (3.89)$$

Шесть постоянных интегрирования α_i , β_i , определяющие общее решение задачи двух тел в форме Гамильтона–Якоби, носят название **элементов Якоби**.

Подходя формально, мы решили поставленную задачу. Но для дальнейшего нам важно иметь связь между элементами Якоби и элементами Кеплера. Для этого нужно вычислить интегралы в (3.87) – (3.89). Поскольку, как видно из (3.89), $\cos^2 \varphi > \alpha_3^2 / \alpha_2^2$, можно положить

$$\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} = \cos i. \quad (3.90)$$

Если теперь сделать соответствующую замену в (3.89), то (3.89) даст после интегрирования и некоторых преобразований, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}i \cdot \sin(\lambda - \beta_3). \quad (3.91)$$

Умножив (3.91) на $r \cos\varphi \cos i$, получим, учитывая известную связь между декартовыми и сферическими координатами:

$$\sin\beta_3 \sin i \cdot x - \cos\beta_3 \sin i \cdot y + \cos i \cdot z = 0. \quad (3.92)$$

Мы получили уравнение плоскости движения и, учитывая (2.48), можно сделать вывод, что постоянная β_3 – это долгота узла, а введенный выше угол i совпадает с наклонением орбиты i . Чтобы найти первый из интегралов в (3.88), сделаем замену переменной интегрирования:

$$\sin\varphi = \sin i \sin u, \quad (3.93)$$

где аргумент широты $u = \omega + v$. Тогда после интегрирования получим, что

$$\alpha_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = u - \beta_2. \quad (3.94)$$

Вычислив интеграл (3.94) с помощью замены $s = 1/r$, получим уравнение орбиты

$$r = \frac{\frac{\alpha_2^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}} \cos(u - \beta_2)}. \quad (3.95)$$

Сравнивая (3.95) с (2.25) – (2.27), увидим, что

$$\frac{\alpha_2^2}{\mu} = p, \quad \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}} = e, \quad \beta_2 = \omega, \quad (3.96)$$

откуда вытекает, что

$$\alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \quad \alpha_1 = \frac{\mu}{2p} (e^2 - 1). \quad (3.97)$$

Из первого равенства (3.97) видно, что элемент α_2 равен кинетическому моменту c , а из второго вытекает уже известное нам соотношение между знаком полной энергии, которой равняется постоянная α_1 , и типом движения в задаче двух тел. А из (3.90) и (3.97) следует, что

$$\alpha_3 = \sqrt{\mu p} \cos i. \quad (3.98)$$

Наконец, если вычислять интеграл (3.94) от наименьшего значения расстояния r (его значения в перицентре) до текущего значения r , то требование того, чтобы левая и правая части (3.94) одновременно обращались в нуль, дает значение $\beta_1 = -\tau$.

Подведем итог, собрав вместе формулы, выражющие элементы Кеплера через элементы Якоби и наоборот. Будем иметь:

$$\Omega = \beta_3, \quad \omega = \beta_2, \quad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad p = \frac{\alpha_2^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, \quad \tau = -\beta_1 \quad (3.99)$$

и

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{2p} (e^2 - 1), \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\mu p} \cos i, \quad \beta_1 = -\tau, \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega. \quad (3.100)$$

Стоит отметить, что элементы Якоби α_i – это именно те характеристики движения частицы, которые в микрофизике квантуются.

3.4. Движение под действием центральной силы. Важной особенностью силы, действующей в задаче двух тел, является ее центральный характер, то есть то, что линия действия силы все время проходит через одну и ту же самую точку – притягивающий центр. Поэтому эту силу можно записать в таком виде:

$$\vec{F} = F(r)\vec{r}^0, \quad (3.101)$$

где \vec{r}^0 – орт радиуса-вектора \vec{r} , а функция

$$F(r) = -\frac{\mu}{r^2}, \quad (3.102)$$

модуль которой определяет величину силы, а знак – характер ее действия (то, что это сила притяжения).

Полезно рассмотреть более общую задачу – задачу о движении под действием произвольной *центральной силы*, у которой функция

$$F = F(r, \dot{r}, t) \quad (3.103)$$

является произвольной функцией расстояния r , скорости его изменения \dot{r} и времени t . Во-первых, это дает возможность выяснить, какие свойства задачи двух тел вытекают из центрального характера действующей в ней силы, а какие определяются характером ее зависимости от расстояния r . Во-вторых, такая задача может иметь и некоторые практические применения. Это может быть задача о движении звезды в шаровом звездном скоплении, где вид функции F определяется распределением звездной плотности в этом скоплении. Или задача о движении планеты около звезды, которая интенсивно теряет массу, тогда $F = F_1(t)/r^2$.

Обобщая уравнение (2.10), запишем уравнение относительного движения в рассматриваемой задаче:

$$\ddot{\vec{r}} - F(r, \dot{r}, t)\vec{r}^0 = 0. \quad (3.104)$$

Умножив уравнение (3.104) на радиус-вектор \vec{r} слева, получим прежде всего интеграл момента:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0 \Rightarrow \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}. \quad (3.105)$$

Таким образом, существование интеграла момента и все следствия, вытекающие отсюда, обязаны именно центральному характеру действующей силы. Самым важным из этих следствий является плоский характер движения под действием центральной силы. Наличие плоскости движения, уравнение которой $\vec{c} \cdot \vec{r} = 0$, позволяет ввести понятие линии узлов, и элементы орбиты, определяющие положение этой плоскости в пространстве, – долготу восходящего узла Ω , наклонение орбиты i (рис. 3.3). Тогда компоненты вектора кинетического момента равны:

$$\begin{aligned} c_1 &= c \sin \Omega \sin i, \\ c_2 &= -c \cos \Omega \sin i, \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$c_3 = c \cos i.$$

Можно ввести также полярные орбитальные координаты r и w , где полярный угол w отсчитывается от направления на восходящий узел. При этом угол w является аналогом аргумента широты ι в задаче двух тел. Теперь радиус-вектор и его орт можно представить следующим образом:

$$\vec{r} = r(t)\vec{r}^0(w(t)), \quad \vec{r}^0 \equiv (\alpha(w(t)), \beta(w(t)), \gamma(w(t))), \quad (3.107)$$

где компоненты орта \vec{r}^0 , которые являются направляющими косинусами вектора \vec{r} , определяются формулами (2.40) и (2.41) с заменой ι на w . Чтобы подставить (3.107) в уравнение движения (3.104), нужно (3.107) дважды продифференцировать по времени t :

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}^0 + r\vec{r}^{0'}, \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{r}^0 + 2\dot{r}\vec{r}^{0'}\dot{w} + r\vec{r}^{0''}w'^2 + r\vec{r}^{0'}\ddot{w}, \quad (3.108)$$

где ' означает производную по w . Линейная зависимость направляющих косинусов от $\sin w$ и $\cos w$ и правила дифференцирования тригонометрических функций приводят к тому, что

$$\vec{r}^{0'} = \vec{r}_\perp^0, \quad \vec{r}^{0''} = -\vec{r}^0, \quad (3.109)$$

где \vec{r}_\perp^0 – орт в плоскости движения, перпендикулярный орту \vec{r}^0 . Подставляя теперь (3.109) в (3.108), а (3.108) в (3.104), будем иметь, что

$$(\ddot{r} - r\dot{w}^2 - F)\vec{r}^0 + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\vec{r}_\perp^0 = 0. \quad (3.110)$$

Поскольку орты \vec{r}^0 и \vec{r}_\perp^0 линейно независимые, то равенство (3.110) может иметь место лишь тогда, когда

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{w}^2 &= F, \\ r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w} &= 0. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Второе из уравнений (3.111) интегрируется один раз, если умножить его на r . Сделав это, получим, что

$$r^2\dot{w} = c. \quad (3.112)$$

Интеграл (3.112) можно получить также, рассмотрев модуль интеграла момента, поэтому постоянная интегрирования в (3.112) должна равняться именно $c = |\vec{c}|$. Исключая из первого уравнения (3.111) производную \dot{w} , получим уравнение для радиуса r :

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = F(r, \dot{r}, t). \quad (3.113)$$

Если можно найти из этого уравнения радиус $r = r(t)$, то (3.112) даст закон движения в виде:

$$w = w_0 + c \int_{t_0}^t \frac{dt}{r(t)}. \quad (3.114)$$

Возможность интегрирования уравнения (3.113) зависит от вида функции F . Если она не зависит от времени t , то целесообразно перейти от независимой переменной t к новому аргументу w . Кроме того, можно устраниТЬ нелинейность c^2/r^3 , если сделать замену зависимой переменной $r = 1/u$. Вычисляя производные \dot{r} и \ddot{r} , находим с помощью (3.112):

$$\dot{r} = -cu', \quad \ddot{r} = -c^2u^2u'', \quad (3.115)$$

а подставляя (3.115) в (3.113), получим уравнение для обратного расстояния u с линейной левой частью:

$$u''+u=-\frac{1}{c^2u^2}F\left(\frac{1}{u},-cu'\right). \quad (3.116)$$

Это уравнение известно как *уравнение Бине*. Оно может быть проинтегрировано, если сила F является функцией только от u . В этом случае делается замена $p(u)=u'$, то есть переменную u выбирают в качестве независимой переменной. Тогда уравнение Бине превращается в уравнение первого порядка:

$$p\frac{dp}{du}+u=-\frac{1}{c^2u^2}F(u)\equiv\Phi(u). \quad (3.117)$$

Переменные в этом уравнении разделяются, что дает после интегрирования:

$$p^2=p_0^2-u^2+u_0^2+2\int_{u_0}^u\Phi(u)du. \quad (3.118)$$

Решая уравнение $p(u)=u'$, находим:

$$w=w_0+\int_{u_0}^u\frac{du}{p(u)} \quad (3.119)$$

и, снова используя (3.112), определяем зависимость

$$\int_{w_0}^w\frac{dw}{u^2(w)}=c(t-t_0). \quad (3.120)$$

Таким образом, найдено общее решение задачи о движении под действием центральной силы, зависящей только от расстояния $r=1/u$, ибо мы имеем шесть независимых постоянных интегрирования \bar{c} , p_0 , u_0 и w_0 . Но в этом случае получить решение задачи можно и другим путем, если ввести силовую функцию задачи соотношением

$$F(r)=\frac{dU}{dr}. \quad (3.121)$$

Тогда, умножая уравнение Бине на u' , можно найти его первый интеграл

$$c^2u'^2+c^2u^2=2U+h. \quad (3.122)$$

Если же в интеграле (3.122) вернуться к переменным r и t , то получим, что

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\omega}^2=2U+h, \quad (3.123)$$

то есть этот первый интеграл – это интеграл энергии.

Возвратимся теперь к задаче двух тел как частному случаю рассматриваемой задачи, то есть положим $F=-\mu/r^2=-\mu u^2$. Увидим, что правая часть уравнения Бине обратится в постоянную μ/c^2 , а само уравнение Бине – в линейное уравнение с постоянными коэффициентами и постоянной правой частью, решение которого находится известным стандартным методом и может быть записано в таком виде:

$$u=\frac{\mu}{c^2}+A\cos(\omega t-\omega_0). \quad (3.124)$$

Полагая произвольную постоянную интегрирования $A = e\mu/c^2$, а постоянную $\mu/c^2 = p$, получим уже известное нам уравнение кеплеровской орбиты:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(w - \omega)}. \quad (3.125)$$

3.5. Релятивистская задача двух тел

Поскольку общая теория относительности (ОТО), как правило, не входит в основной курс теоретической физики, сжато рассмотрим физические и математические основы этой теории.

3.5.1. Элементы общей теории относительности. Общая теория относительности исходит из известного, установленного с большой точностью, экспериментального факта равенства инертной и гравитационной масс любого физического объекта. Всеобщность этого факта означает, что есть глубокая связь между движением по инерции и движением в гравитационном поле. Эта связь находит свое проявление в *принципе эквивалентности* движения в гравитационном поле в инерциальной системе отсчета и свободного движения в соответствующей неинерциальной системе отсчета. А так как движение в произвольном гравитационном поле неравномерно и криволинейно, то мы приходим к необходимости перейти от плоского четырехмерного многообразия пространства-времени Минковского специальной теории относительности (СТО) к искривленному пространственно-временному многообразию. Эта необходимость связана с тем, что, заменяя движение в гравитационном поле на свободное движение в неинерциальной системе отсчета, нельзя в конечной части пространства ввести декартову систему координат вместо криволинейной, как это всегда можно сделать в плоском пространстве-времени Минковского. Согласно этому нужно обобщить известное в СТО выражение для интервала

$$ds^2 = c^2 t^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \quad (3.126)$$

заменив его на произвольную квадратичную форму от координат:

$$ds^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 g_{ik} dx^i dx^k, \quad (3.127)$$

где совокупность коэффициентов

$$g_{ik} = g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (3.128)$$

образует *фундаментальный* или *метрический тензор*, ибо он определяет метрические свойства (метрику) пространства-времени. В записях (3.126) – (3.128) сделан переход к индексным обозначениям координат и положено $ct = x^0$, где, напомним, c – скорость света. Тензор g_{ik} описывает искривленность пространства-времени и, одновременно, описывает гравитационное поле, ибо в этой искривленности с точки зрения ОТО гравитация и проявляет себя как физическое явление.

Обращает на себя внимание наличие в записях (3.126) – (3.128) верхних и нижних индексов. Их появление связано с тем, что в криволинейных системах координат нужно различать две возможные формы задания

векторных и тензорных величин – ковариантную и контравариантную. По определению, *контравариантным вектором* называется вектор, который при переходе от системы координат x'^k к системе x^i преобразуется так, как преобразуется дифференциал

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k, \quad (3.129)$$

то есть

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \quad (3.130)$$

Начиная с записей (3.129) и (3.130), мы будем использовать *правило суммирования Эйнштейна*, по которому имеется в виду суммирование по индексу, встречающемуся в данной записи дважды, один раз как верхний, другой – как нижний. *Ковариантный вектор* – это вектор, преобразующийся подобно градиенту скалярной функции

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial \psi}{\partial x'^k}, \quad (3.131)$$

то есть

$$A_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'_k. \quad (3.132)$$

С геометрической точки зрения появление этих двух типов векторов (а точнее, двух форм одной и той же векторной величины) связано с тем, что вектор можно задать как его компонентами, которые являются коэффициентами разложения этого вектора по ортам координатных осей (контравариантная форма), так и проекциями вектора на координатные оси (ковариантная форма). Эти две формы будут различаться уже даже в косоугольной системе координат (рис. 3.4), но совпадать между собой в прямоугольной. Переход от одной формы к другой (так называемое поднятие или опускание индексов) осуществляется умножением вектора на фундаментальный тензор. Например:

$$A_i = g_{ik} A^k. \quad (3.133)$$

Тензоры также могут быть ковариантными (A_{ik}) и контравариантными (A^{ik}), а также смешанными (A_k^i). Ковариантный и контравариантный метрические тензоры взаимно обратны, то есть $g_{il} \cdot g^{kl} = \delta_i^k$ – единичному тензору. На тензоры распространяется и правило поднятия и опускания индексов.

Искривленность пространства-времени приводит к определенному осложнению при дифференцировании векторов и тензоров как функций координат. Чтобы получить производную, нужно (согласно ее определению) сначала найти разность значений дифференцируемой функции в двух близких точках. Если эта функция – вектор, то для этого требуется перенести начало вектора из одной точки в другую. Если вычисляется частная производная по некоторой координате, то такой перенос вектора происходит вдоль соответствующей координатной линии, которая искривлена, и поэтому

компоненты вектора при таком переносе дополнительно изменяются (рис. 3.5). Так как перенос происходит между бесконечно близкими точками, то это изменение можно считать линейным как по компонентам вектора, так и по дифференциалам координат. Иначе говоря, полный дифференциал контравариантного вектора в криволинейных координатах можно записать таким образом:

$$DA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x_k} dx^k + \Gamma_{kl}^i A^l dx^k, \quad (3.134)$$

где совокупность коэффициентов Γ_{kl}^i получила название *символов Кристоффеля* (или коэффициентов связности). Разделив (3.134) на dx^k , получим так называемую *ковариантную производную* вектора

$$A_{;k}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i A^l. \quad (3.135)$$

Для ковариантного вектора ковариантная производная равна:

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l A_l. \quad (3.136)$$

Символы Кристоффеля Γ_{kl}^i , являющиеся определенной мерой искривленности пространства-времени, не образуют тензора третьего ранга. Они являются линейными функциями производных от компонент метрического тензора (чем больше искривлено пространство, тем быстрее изменяется вектор при его переносе):

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (3.137)$$

Формулы ковариантного дифференцирования обобщаются на случай тензоров. Например:

$$A_{k;l}^i = \frac{\partial A_k^i}{\partial x^l} - \Gamma_{kl}^m A_m^i + \Gamma_{ml}^i A_m^l. \quad (3.138)$$

Можно показать, что всегда можно выбрать такую систему отсчета, что в данной точке все символы Кристоффеля будут равны нулю. Поэтому желательно иметь такую меру искривленности пространства-времени, которая бы имела тензорный характер и обращалась в 0 только в плоском пространстве. Такой мерой является *тензор кривизны*. Ввести его можно следующим образом: чем больше будет искривленность пространства, тем больше будет отношение изменения вектора при его параллельном переносе вдоль некоторого замкнутого контура к площади, ограниченной этим контуром. Например, поворот вектора при обходе границ октантов двух сфер (рис. 3.6) одинаков и равен 90° , а площадь меньше у октанта сферы меньшего радиуса и, соответственно, большей кривизны. Изменение вектора при обходе замкнутого контура L равно

$$\Delta A_k = \oint_L \Gamma_{kl}^i A_i dx^l. \quad (3.139)$$

Перейдем в (3.139) от криволинейного интеграла к поверхностному по поверхности S , ограниченной контуром L , с помощью теоремы Стокса. При

этом необходимые производные будем вычислять по формуле (3.135). Наконец, уменьшая неограниченно контур L и поверхность S , получим:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R_{klm}^i A_i \Delta S^{lm}, \quad (3.140)$$

при этом элемент ΔS^{lm} координатной поверхности S^{lm} будет задаваться двумя индексами – индексами координатных линий, лежащих на этой поверхности. Теперь удвоенное отношение $\Delta A_k / A_i \Delta S^{lm}$, которое является тензором четвертого ранга R_{klm}^i , и будет мерой искривленности пространства-времени в точке, к которой стягиваются контур L и поверхность S . Вычисления показывают, что этот тензор кривизны (или *тензор Римана-Кристоффеля*) равняется

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n. \quad (3.141)$$

С учетом (3.137) видно, что компоненты тензора кривизны включают линейно вторые производные от компонент метрического тензора и произведения первых производных. Если свернуть этот тензор по индексам i и m , получим *тензор кривизны второго ранга (тензор Риччи)*

$$R_{kl} = \frac{\partial \Gamma_{km}^m}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^m}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^m \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^m \Gamma_{kl}^n. \quad (3.142)$$

А сворачивая тензор Риччи, будем иметь *скалярную кривизну* $R = g^{kl} R_{kl}$. Все компоненты тензоров кривизны R_{klm}^i и R_{kl} обращаются в ноль только в плоском пространстве-времени.

В соответствии с основной идеей ОТО характеристики искривленности пространства-времени должны определяться распределением и движением тяготеющей материи, находящейся в нем. Эти распределение и движение описываются тензором энергии-импульса

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon & \frac{W_1}{c} & \frac{W_2}{c} & \frac{W_3}{c} \\ \frac{W_1}{c} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ \frac{W_2}{c} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ W_{3c} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.143)$$

где времененная компонента T_{00} – это *плотность энергии*, смешанные компоненты T_{0k} ($k \neq 0$) образуют с точностью до множителя $1/c$ вектор *потока энергии* \bar{W} (вектор Умова–Пойнтинга). А пространственная часть тензора энергии-импульса – это трехмерный *тензор напряжений* p_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$). Его диагональные компоненты – это давление вдоль координатных осей, а недиагональные p_{ik} ($i \neq k$) – k -тые компоненты сдвиговых напряжений в плоскостях, перпендикулярных осям x^i . Вышеприведенная форма тензора энергии-импульса имеет в виду описание материальных объектов как непрерывных (сплошные среды, физические поля). Для описания дискретных систем нужно использовать так называемые

обобщенные функции, самым простым и известным представителем которых служит δ -функция Дирака.

Так как одна из компонент основного уравнения ОТО при предельном переходе к слабому гравитационному полю, когда становится малым отношение гравитационного потенциала к квадрату скорости света ($V/c^2 \ll 1$), должна переходить в линейное уравнение Пуассона $\nabla^2 V = 4\pi G\rho$, то это искомое уравнение должно быть линейным относительно тензоров g_{ik}, R_{ik} и T_{ik} , то есть ему можно придать такой вид:

$$R_{ik} + ag_{ik} = bT_{ik}. \quad (3.144)$$

Свойства тензора кривизны, который удовлетворяет некоторым тождествам (тождество Бианки и Эйнштейна), позволяют найти коэффициент a , а предельный переход к $V \ll c^2$ даст коэффициент b . Окончательно уравнения, которые определяют как метрику пространства-времени, так и движение материи в нем под действием гравитации (уравнения Эйнштейна), имеют следующий вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}. \quad (3.145)$$

Конечно, только что сказанное – это не строгий вывод уравнений Эйнштейна. Для более подробного знакомства с ОТО нужно обратиться, например, к одной из книг [11, 21, 26]. Основы общего тензорного анализа рассмотрены в пособии [9].

3.5.2. Центрально-симметричное поле. Рассмотрим вопрос о том, какое гравитационное поле, то есть какую метрику, создает вокруг себя материальная точка или тело со сферически-симметричным распределением вещества. Естественно использовать для этого сферическую систему координат: $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \theta$, где φ – долгота, а θ – полярное расстояние. Так как свойства пространства должны быть одинаковыми во всех направлениях, перпендикулярных радиусу-вектору, то пространственные недиагональные компоненты метрического тензора должны равняться 0, а зависимость от угловых координат должна быть такой же, как и в плоском пространстве. Это позволяет записать выражение для интервала в следующем виде:

$$ds^2 = h(r, t)c^2 dt^2 - l(r, t)dr^2 - k(r, t)(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) + a(r, t)dtdr. \quad (3.146)$$

Привольность в выборе системы отсчета позволяет сделать такое преобразование координат $r = f_1(r', t')$ и $t = f_2(r', t')$, чтобы $a(r, t) = 0$, а $k(r, t) = r^2$. Тогда, введя обозначения $h(r, t) = e^\nu$ и $l(r, t) = e^\lambda$, будем иметь:

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2). \quad (3.147)$$

Выражение (3.147) дает такие значения компонент метрического тензора:

$$g_{00} = e^\nu, \quad g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{33} = -r^2. \quad (3.148)$$

В результате принципиально не сложных, но довольно громоздких вычислений можно теперь найти с помощью (3.137) символы Кристоффеля. Отличными от 0 (с точностью до свойств симметрии $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$) оказываются:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma_{10}^0 = \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{\lambda}}{2}, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg} \theta, \quad \Gamma_{33}^1 = r e^{-\lambda} \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta,\end{aligned}\quad (3.149)$$

тут штрих означает производную по r , а точка – по ct . Вычисляя по формуле (3.142) компоненты тензора кривизны второго ранга и имея в виду, что мы ищем поле, создаваемое сферически-симметричным телом вокруг него в пустоте, то-есть там, где тензор энергии-импульса $T_{ik} = 0$, получим из (3.148) такую систему уравнений для функции ν и λ :

$$\begin{aligned}e^{-\lambda} \left(\nu' + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} &= 0, \\ e^{-\lambda} \left(\lambda' - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} &= 0, \\ \dot{\lambda} &= 0.\end{aligned}\quad (3.150)$$

Из последнего уравнения (3.150) видно, что функция λ не зависит от времени t . А из суммы первых двух уравнений следует, что $\lambda + \nu = f(t)$, а это означает, что функции e^λ и e^ν отличаются друг от друга лишь времененным множителем. Если сделать такое преобразование времени, чтобы функция $f(t) = 0$, то $e^\nu = e^{-\lambda}$. Во втором из уравнений (3.150) переменные разделяются, и оно после интегрирования дает:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad (3.151)$$

где r_g – постоянная интегрирования. На расстояниях r , достаточно больших, мы должны получить закон всемирного тяготения Ньютона, то есть потенциал $V = fM/r$, где M – масса тела, создающего сферически-симметричное поле. А если в уравнениях Эйнштейна ограничиться членами порядка V/c^2 , то найдем, что $g_{00} = 1 - 2V/c^2$. Отсюда вытекает, что постоянная

$$r_g = \frac{2fM}{c^2}. \quad (3.152)$$

Величина r_g получила название *гравитационного радиуса* тела. Интересно то, что формулу (3.152) нашел еще двести лет тому назад П. Лаплас. Он задал вопрос: каким должен быть радиус тела с массою M , чтобы параболическая скорость на его поверхности равнялась скорости света, и свет при меньшем радиусе тела не мог его покинуть, то есть чтобы это тело было тем, что в наше время называли *черной дырой*.

Окончательно из (3.147) и (3.152) получаем такое выражение для интервала:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2). \quad (3.153)$$

Эта метрика пространства, окружающего сферически-симметричное тело, называется *метрикой Шварцшильда*, а соответствующее ей гравитационное поле – *полем Шварцшильда*. Из (3.153) вытекает, что собственное время, то есть время в системе отсчета, начало которой находится в данной точке пространства,

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \cdot t < t, \quad (3.154)$$

где t – время в системе отсчета с началом в центре тела, которое создает поле Шварцшильда. Расстояние между точками r_1 и r_2 вдоль любого радиального направления равно

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1. \quad (3.155)$$

3.5.3. Движение материальной точки в поле Шварцшильда. В соответствии с основной идеей ОТО релятивистская задача двух тел (при условии $M \gg m$) сводится к исследованию свободного движения материальной точки в пространстве-времени с метрикой Шварцшильда. Чтобы провести это исследование, нужно прежде всего записать уравнение четырехмерной линии, которая бы обобщала уравнение равномерного и прямолинейного движения по инерции в СТО. Такая линия называется *геодезической*. В СТО вводится понятие четырехмерной скорости $u^i = dx^i / ds$ и, соответственно, уравнение свободного движения $du^i / ds \equiv d^2x^i / ds^2 = 0$. В соответствии с формулой ковариантного дифференцирования (3.135) в ОТО это уравнение перейдет в такое *уравнение геодезической*:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (3.156)$$

Перепишем выражение, задающее метрику Шварцшильда, в таком виде:

$$c^2 e^\nu \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - e^\lambda \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\sin \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 \right) = 1. \quad (3.157)$$

Вычисление (3.156) с помощью (3.149) дает такую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{ds^2} + \nu' \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2r}{ds^2} + \frac{\nu'}{2} \left[c^2 e^{2\nu} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 \right] - re^\nu \left[\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right] &= 0, \\ \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2 \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} - \operatorname{ctg} \theta \frac{d\theta}{ds} \right] \frac{d\varphi}{ds} &= 0. \end{aligned} \quad (3.158)$$

Из соображений симметрии нужно ожидать, что в силу центральной симметрии задачи движение будет плоским. Выберем плоскость движения в качестве экваториальной плоскости системы координат. Тогда полярное

расстояние $\theta = \pi/2$, кроме того, будем отсчитывать долготу φ от начального направления радиуса-вектора, то есть положим значение $\varphi_0 = 0$. Теперь третье уравнение (3.158) будет выполняться тождественно, а второе и четвертое уравнения соответствующим образом упростятся. Разделив первое уравнение на dt/ds , а четвертое – на $d\varphi/ds$, можно привести их к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\ln \left(c \frac{dt}{ds} \right) \right) + \frac{d\nu}{ds} &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(\ln \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \right) + \frac{d}{ds} (\ln r^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.159)$$

Интегрируя (3.159), получим такие первые интегралы нашей задачи:

$$e^\nu \frac{dt}{ds} = k, \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = c_0. \quad (3.160)$$

Исключая теперь производные по t и φ из (3.159) с помощью (3.160), получим уравнение:

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + e^\nu \left(\frac{c_0^2}{r^2} + 1 \right) - \frac{k^2}{c^2} = 0. \quad (3.161)$$

Перейдя в (3.162) от независимой переменной s к независимой переменной φ и сделав замену $r = 1/u$, получим:

$$c_0^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + e^\nu (c_0^2 u^2 + 1) - \frac{k^2}{c^2} = 0. \quad (3.162)$$

Наконец, исключив из (3.163) величину e^ν с помощью (3.151) и дифференцируя полученное уравнение по φ , найдем уравнение орбиты в релятивистской задаче двух тел:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{3}{2} r_g u^2, \quad (3.163)$$

где положено $c_0^2 / r_g = p$, а r_g – гравитационный радиус центрального тела (3.152). Уравнение (3.164) лишь вторым слагаемым справа отличается от уравнения орбиты классической задачи двух тел в форме (3.116). Сделаем оценки слагаемых в правой части уравнения (3.163), имея в виду планеты Солнечной системы. Первое слагаемое равно $\approx 1/a$, а второе – $\approx r_g / a^2$, где a – большая полуось планетной орбиты. Гравитационный радиус Солнца составляет примерно 3 км. То есть даже для Меркурия отношение второго слагаемого к первому очень малая величина, порядка 10^{-7} . Это дает возможность решать уравнение (3.163) методом последовательных приближений, взяв в качестве нулевого приближения кеплеровское уравнение орбиты

$$u_0 = \frac{1}{p} (1 + e \cos \varphi). \quad (3.164)$$

Подставляя (3.164) в правую часть уравнения (3.163), получим следующее уравнение для первого приближения:

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = \frac{1}{p} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{r_g}{p} (1 + e \cos \varphi)^2 \right]. \quad (3.165)$$

Преобразуя второе слагаемое в правой части уравнения (3.165), можно получить:

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = \frac{1}{p} \left[1 + 3 \frac{r_g}{p} e \cos \varphi + \frac{3}{4} \frac{r_g}{p} e^2 \cos 2\varphi \right], \quad (3.166)$$

при этом мы пренебрегли малой постоянной $3r_g(1 + e^2)/2p$. Уравнение (3.166) решается стандартными методами теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Его решение имеет такой вид:

$$u_1 = \frac{1}{p} \left(1 + e \cos \varphi + \frac{3}{2} \frac{r_g}{p} e \varphi \sin \varphi - \frac{1}{4} \frac{r_g}{p} e^2 \cos 2\varphi \right). \quad (3.167)$$

Последнее слагаемое в решении (3.167) имеет малую амплитуду, а в третьем слагаемом она растет со временем, поэтому последним слагаемым можно пренебречь. Рассмотрим величину $\cos(\varphi - \delta\varphi)$, где $\delta\varphi$ – малая величина. Имеем тогда, что

$$\cos(\varphi - \delta\varphi) = \cos \varphi + \delta\varphi \sin \varphi. \quad (3.168)$$

Сравнивая (3.167) и (3.168), прийдем к выводу, что множитель перед $\sin \varphi$ в (3.167) можно рассматривать как дополнительное изменение в аргументе широты, который равен в силу начального условия значению координаты φ , и это изменение равняется

$$\delta\varphi = \frac{3}{2} \frac{r_g}{p} \varphi. \quad (3.169)$$

За один оборот планеты по орбите угол φ изменяется на 2π , и величину $\delta\varphi(2\pi)$ можно трактовать как изменение ориентации эллиптической орбиты планеты в ее плоскости, то есть изменениеperiцентрового расстояния (*релятивистский поворот перицентра*) за один оборот. С помощью третьего закона Кеплера величине этого поворота можно придать следующий вид:

$$\delta\omega = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)}, \quad (3.170)$$

где T – классический период оборота планеты. Величина $\delta\omega$ очень мала, поэтому по традиции вычисляется величина поворота линии апсид за сто лет. Расчеты показывают, что для Меркурия эта величина равна $43.03''$, для Венеры – $8.62''$, для Земли – $3.84''$, для Марса – $1.35''$.

Этот поворот перицентра является единственным общерелятивистским эффектом в задаче двух тел в первом приближении. Эффекты более высоких приближений для Солнечной системы лежат далеко за пределами точности наблюдений. Но это не исключает целесообразности исследования точного решения релятивистской задачи двух тел, которое, кстати говоря, может быть найдено в эллиптических функциях.

Расхождение примерно в $40''$ за сто лет между наблюдаемым поворотом перигелия Меркурия и тем его значением, которое вызывается возмущающим влиянием других планет, было известно еще со второй

половины XIX века. В принципе это расхождение было объяснено в ОТО. Однако небольшая точность этого подтверждения ОТО, как и других экспериментальных ее проверок ($\approx 10\%$), приводила на протяжении десятилетий к неоднократным попыткам если не опровергнуть ОТО, то по крайней мере заменить ее какой-либо альтернативной теорией. Но сейчас вся совокупность наземных экспериментов (в частности, чрезвычайно точные измерения изменения силы тяжести с высотой с помощью эффекта Мессбауера) и наблюдений за движением планет и межпланетных автоматических станций радиотехническими средствами подтверждают ОТО с точностью по крайней мере в 0.01 %. В СССР и США были разработаны релятивистские теории движения больших планет, которые с успехом используются при баллистических расчетах космических миссий к этим планетам. Хотя в ОТО и ее применениях еще есть некоторые нерешенные проблемы (в частности, еще недостаточна ее экспериментальная проверка в сильных гравитационных полях), она является надежной основой для решения задач, выходящих за рамки классической механики и ньютоновской теории тяготения, задач небесной механики и астрономии в частности.

3.6. Задача двух тел в пространстве произвольного числа измерений

Задача двух тел (классическая) в пространстве произвольного числа измерений была рассмотрена П. Эренфестом в 1907 г. Однако долгое время результаты этого рассмотрения имели лишь абстрактное значение, ибо физика и астрономия имели дело только с трехмерным пространством окружающего нас мира. Но последние результаты на стыке космологии ранней Вселенной и физики элементарных частиц дают возможность говорить о существовании наряду с нашей Вселенной других вселенных с другими фундаментальными свойствами, в частности, с другим, нежели три, числом измерений пространства (см. подробнее об этом, например, в [35]). Это сделало задачу, являющуюся предметом настоящего раздела, весьма актуальной. Кроме того, ниже будет продемонстрирован полезный метод качественного анализа задач механики.

Будем считать, что в пространстве любого числа измерений сохраняются такие его свойства, как однородность и изотропность пространства и однородность времени. Это означает, что должны существовать интегралы момента и энергии, а значит, такое свойство движения в задаче двух тел, как его плоский характер. А это, в свою очередь, означает, что квадрат скорости движения можно записать следующим образом:

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2, \quad (3.171)$$

а подставляя (3.171) в интеграл энергии (2.16), будем иметь

$$\dot{r} = \pm \sqrt{h - W_N(r)}, \quad (3.172)$$

где W_N – обобщенный потенциал задачи. Он равен удвоенной сумме центробежного потенциала, которому с помощью (2.35) можно придать вид

$c^2 / 2r^2$, и гравитационного потенциала, который в пространстве N измерений мы обозначим как $V_N(r)$, то есть

$$W_N(r) = \frac{c^2}{r^2} - 2V_N(r). \quad (3.173)$$

Напомним, что $V_3 = \mu / r$. Какой же вид имеет гравитационный потенциал в N -мерном пространстве? Ответ на этот вопрос вытекает из того обстоятельства, что вне гравитирующих масс этот потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 V_N}{\partial x_i^2} = 0, \quad (3.174)$$

решение которого в случае, когда потенциал создается материальной точкой, находящейся в начале координат, равно, как можно проверить,

$$V_N = \frac{\mu}{(N-2)r^{N-2}}. \quad (3.175)$$

Следует только заметить, что выражение (3.175) не пригодно, когда $N = 2$, но, как легко убедиться, в двухмерном мире

$$V_2 = -\mu \ln r. \quad (3.176)$$

Как видно из выражения (3.175), степень в знаменателе на две единицы меньше размерности пространства, соответственно, сила тяготения будет обратно пропорциональна r^{N-1} . С физической точки зрения это означает, что сила такова, что убывает с расстоянием наиболее медленно при условии конечности полной энергии взаимодействия, что следует из условия сходимости соответствующего несобственного интеграла. На связь между трехмерностью нашего пространства и обратно квадратичной зависимостью силы от расстояния в законе всемирного тяготения обратил внимание еще И. Кант.

Из (3.172) вытекает, что движение возможно только при таких значениях координаты r , при которых подкоренное выражение неотрицательно, что будет тогда, когда

$$W_N(r) \leq h, \quad (3.177)$$

то есть лишь там, где на графике $W_N - r$ кривая $W_N(r)$ проходит ниже прямой $W_N = h$. Рассмотрим эти графики для разных значений размерности пространства N . Запишем обобщенный потенциал $W_N(r)$ для $N = 2, 3, 4, 5$:

$$W_2 = \frac{c^2}{r^2} + 2\mu \ln r, \quad W_3 = \frac{c^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r}, \quad W_4 = \frac{c^2 - \mu}{r^2}, \quad W_5 = \frac{c^2}{r^2} - \frac{2\mu}{3r^3}. \quad (3.178)$$

Нетрудно убедиться, что во всех случаях ось r будет горизонтальной асимптотой, а ось W_N – вертикальной. Производная от потенциала равна

$$W_N'(r) = -\frac{2c^2}{r^3} - \frac{2\mu}{r^{N-1}} \quad (3.179)$$

и во всех случаях, кроме $N = 4$, будет на кривой $W_N(r)$ лишь один экстремум в точке

$$r_0 = \left(\frac{\mu}{c^2} \right)^{1/(N-1)}. \quad (3.180)$$

Из характера асимптотического поведения функций $W_N(r)$ видно, что этот экстремум при $N=2,3$ является минимумом, а при $N=5$ – максимумом. Общие выражения (3.175) и (3.180) показывают, что при $N > 5$ качественный характер поведения функций $W_N(r)$ по сравнению со случаем $N=5$ не изменится, поэтому и рассматривать их нет необходимости.

Графики обобщенных потенциалов $W_N(r)$ показаны на рис. 3.7. Видно, что в случаях $N=2, 3, 5$ возможны круговые орбиты с радиусами r_0 , устойчивые в двухмерном и трехмерном мирах, но неустойчивые в пятимерном мире. Более того, в двухмерном мире имеет место в некотором смысле сверхустойчивость – движение всегда будет финитным, ограниченным кольцом $r_1 < r < r_2$, при любом конечном значении полной энергии $h/2$. В этом мире нет понятия второй космической скорости (иначе говоря, $V_2 = \infty$). В многомерных мирах ($N \geq 4$) материальная точка в своем движении (если не принимать во внимание неустойчивую круговую орбиту при $N \geq 5$) в конце концов или очутится в притягивающем центре ($r \rightarrow 0$), или уйдет на бесконечность ($r \rightarrow \infty$), то есть финитное движение на протяжении неограниченно долгого времени невозможно.

И только наше “родное” трехмерное пространство выделяется богатством своих возможностей – при отрицательной полной энергии движение имеет финитный характер (круговой или эллиптический, $r_1 \leq r \leq r_2$). При энергии $h/2 \geq 0$ движение будет инфинитным (параболическим или гиперболическим). При этом переход от одного типа движения к другому происходит при конечном изменении полной энергии. Заметим, что это не единственная особенность трехмерного пространства. Только в нем число независимых компонент антисимметричного тензора (это число есть $(N^2 - N)/2$) равно размерности пространства, ибо уравнение $(N^2 - N)/2 = N$ имеет лишь один нетривиальный корень $N=3$. Это, в свою очередь, означает, что только в трехмерном пространстве можно ввести понятие векторного произведения векторов, которое на самом деле есть псевдовектор, а точнее говоря, – антисимметричный тензор второго ранга. Из этого вытекает, что “математическое лицо” физики в мирах с другой, нежели три, размерностью пространства должно быть иным и более сложным – уже классическая механика и электродинамика будут иметь существенно тензорный характер.

Но главное состоит в том, что эту физику скорее всего некому там будет развивать. Проведенный анализ задачи двух тел в пространстве произвольной размерности показывает, что существование гравитационно связанных систем (планетных, в частности) и электростатически связанных (атомы и молекулы) возможно лишь в двух- и трехмерном мирах. Но в двухмерном мире невозможно разрушение таких систем (межпланетные полеты, разлет вещества при вспышках сверхновых, ионизация атомов и молекул). А значит, развитие высших, нежели физическая, форм организации

и движения материи (химической, биологической, социальной) возможно лишь в мирах с определенными фундаментальными физическими свойствами, в частности, лишь в трехмерных мирах. Последнее утверждение составляет суть так называемого *антропного принципа*, который имеет огромное мировоззренческое значение. Обоснование этого принципа не ограничивается вышесказанным. Оно включает как необходимые условия качественного развития материи, достаточно тонкую сбалансированность между собою констант фундаментальных физических взаимодействий и спектра масс элементарных частиц (см. подробнее об этом в [35]). Антропный принцип делает если не необходимым, то весьма естественным телеологический взгляд на мир, то-есть представление о том, что наш мир создан специально с определенной целью, например, появления в нем человека. Но сразу же встает вопрос – кем создан? То есть телеологический взгляд на мир означает, по сути, и теологический, религиозный взгляд на него. Однако представление о множественности вселенных, о чем уже упоминалось в начале этого раздела, позволяет сохранить и развить материалистический взгляд на мир. При большом количестве вселенных и случайном характере формирования их свойств, который вытекает из квантовой природы ранней Вселенной, возникновение вселенной со всеми необходимыми условиями для ее качественной эволюции есть явление закономерное, но эта закономерность имеет вероятностную, стохастическую природу.

Задачи к главе III

3.1. Доказать, что оценка ошибки при решении уравнения Кеплера методом итераций равна

$$|E - E_n| \leq \frac{1}{1-e} |E_{n-1} - E_n|.$$

3.2. Получить формулу Гюльдена для малых значений эксцентриситета:

$$\operatorname{tg} E = \frac{\sin M}{\cos M - e}.$$

3.3. Доказать, что для аналитической функции эксцентриситеской аномалии $F(E)$ и любого натурального n :

$$\frac{d^n F}{de^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}} \left[F'(M) \sin^n M \frac{\partial E}{\partial M} \right].$$

3.4. Пользуясь рядом Лагранжа, доказать, что функция

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2te + e^2}}$$

является производящей функцией полиномов Лежандра.

3.5. Разложить в ряд Фурье по средней аномалии модуль скорости V , ее радиальную и нормальную к радиусу компоненты V_r и V_n в задаче двух тел.

3.6. Найти наименьшее и наибольшее время перелета между планетами, движущимися по компланарным орбитам с большими полуосями a_1 и a_2 и эксцентриситетами e_1 и e_2 .

- 3.7. Доказать теорему Эйлера для параболического движения.
- 3.8. Записать аналог теоремы Ламберта для гиперболического движения.
- 3.9. Определить траекторию и закон движения по ней звезды в однородной эллиптической галактике, найдя полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби этой задачи.
- 3.10. Звезда движется в однородном шаровом скоплении по эллиптической орбите, центр которой совпадает с центром эллипса. Доказать, что модуль ее скорости равен

$$V = \frac{2\pi\rho}{P},$$

где ρ – полудиаметр, сопряженный с радиусом-вектором звезды, а P – период ее оборота по орбите.

- 3.11. Орбита точки, движущейся под действием центральной силы $F(r)$, имеетperiцентр и апоцентр. Доказать, что скорость точки на произвольном расстоянии r определяется формулой:

$$V^2 = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \int_a^r F(r)dr + \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \int_r^b F(r)dr,$$

где a и b – расстояния в periцентре и апоцентре.

- 3.12. Найти в квадратурах решение уравнений движения точки под действием центральной силы

$$F(r, t) = \frac{\mu}{(at + b)r^2}.$$

- 3.13. Оценить величину поворота за сто лет periцентра орбиты планеты, обнаруженной у звезды класса F0, если полуось ее орбиты $a = 0.05 a.e.$

- 3.14. Найти закон движения материальной точки (зависимость расстояния r и времени t от величины интервала s , которая падает в поле Шварцшильда: а) из состояния покоя с расстояния $r = R$, б) из состояния покоя из бесконечности, в) из бесконечности с начальной скоростью V_∞ .

- 3.15. Найти время падения на притягивающий центр материальной точки в пространстве N измерений ($N \geq 4$), если падение начинается с расстояния $r = R$.

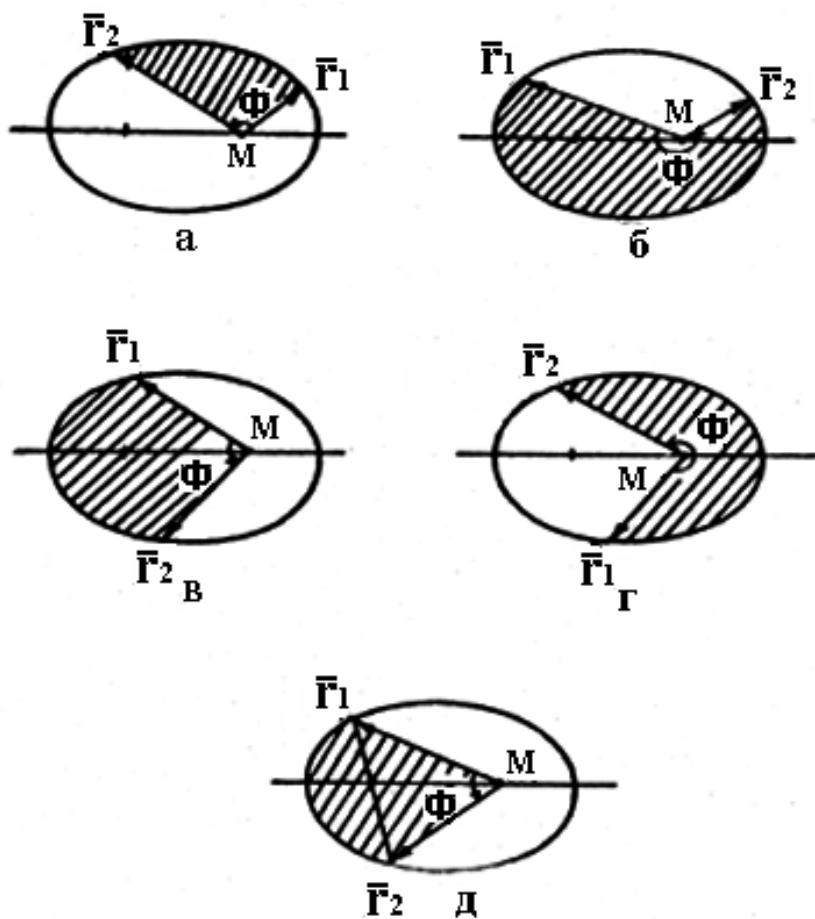


Рис. 3.2. Различные случаи размещения эллиптического сектора относительно большой оси эллипса

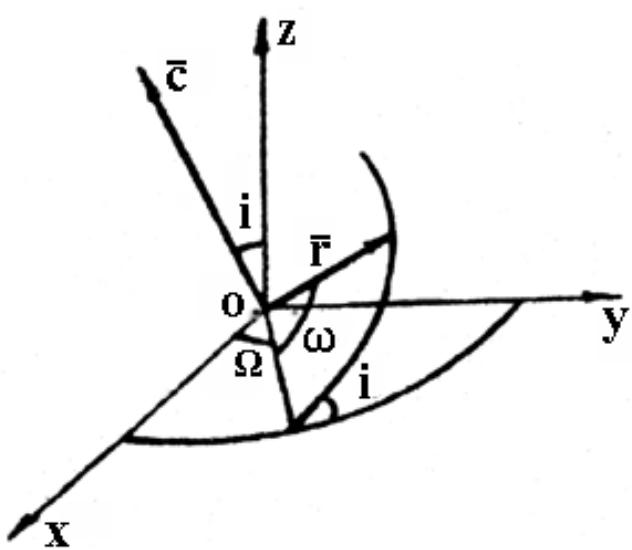


Рис. 3.3. Движение под действием центральной силы

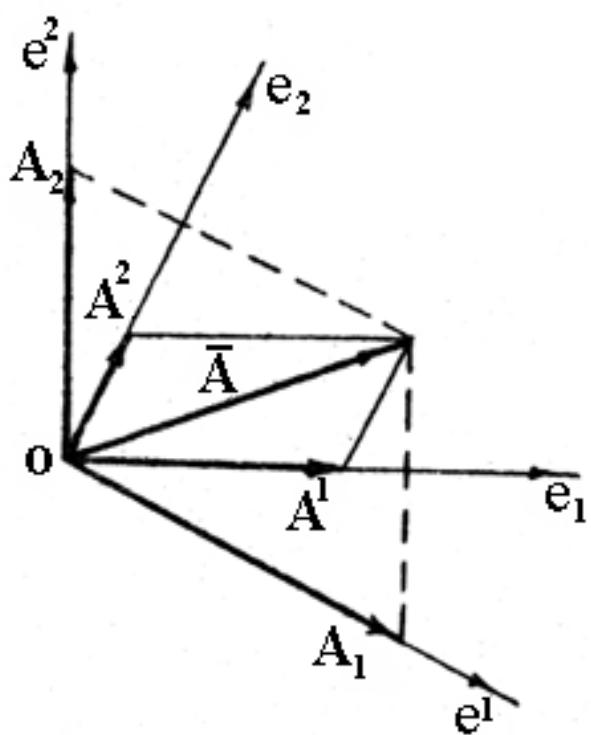


Рис. 3.4. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора

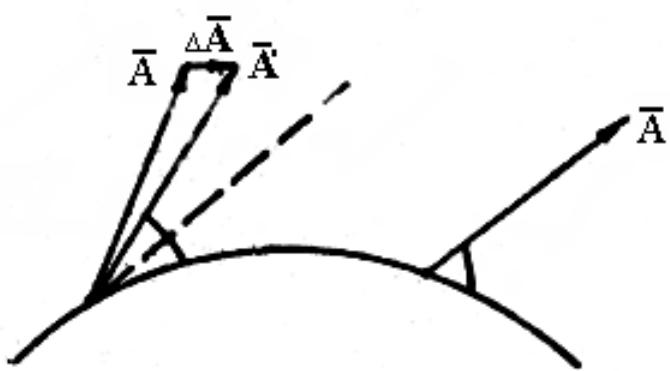


Рис. 3.5. Параллельный перенос вектора в криволинейной системе координат

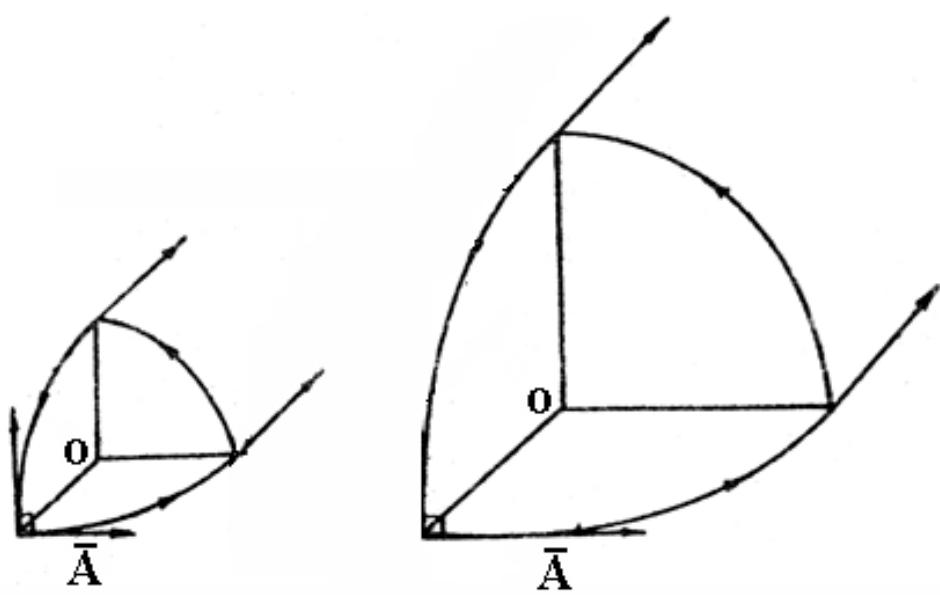


Рис. 3.6. Поворот вектора при его параллельном переносе вдоль замкнутого контура

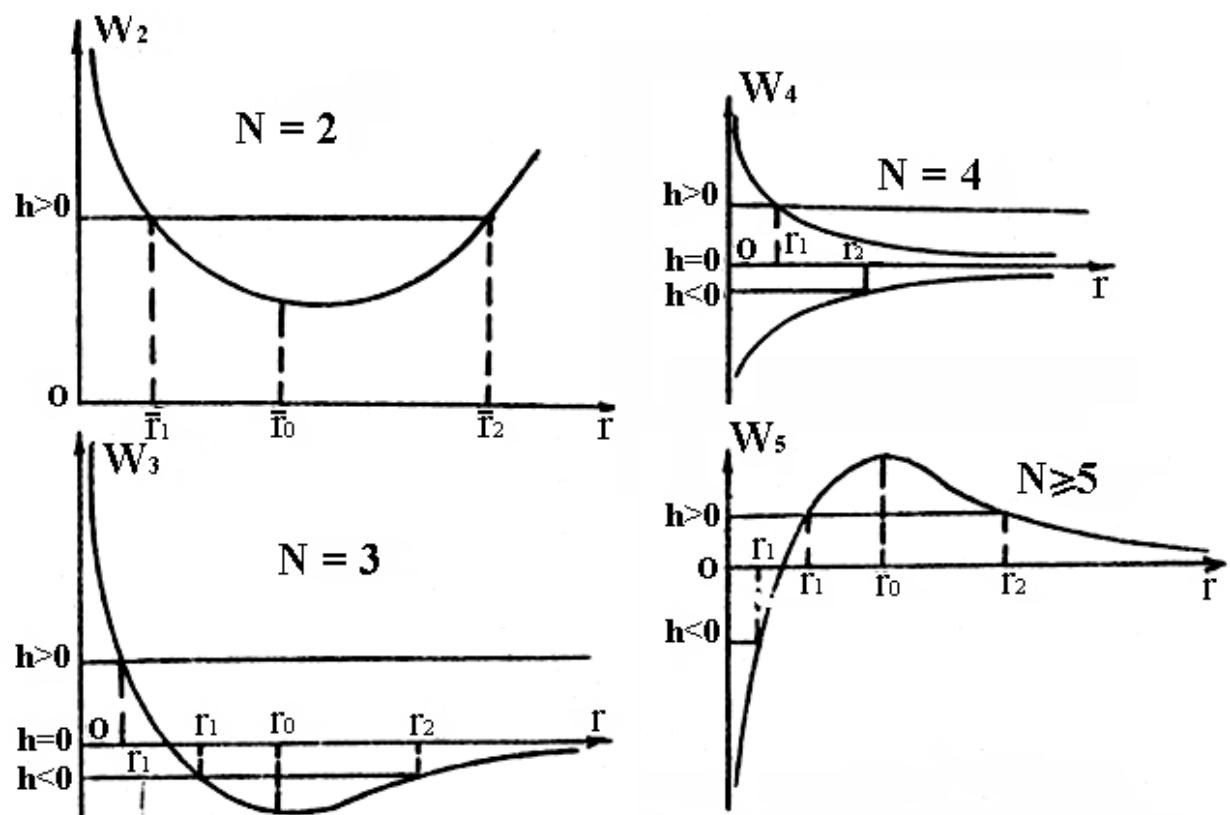


Рис. 3.7. Зависимость обобщённого потенциала W задачи множества тел от расстояния r в пространстве N измерений

Глава IV. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Понятие возмущенного и невозмущенного движений были введены в разделе 1.3. Их уравнения, соответственно,

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{F} \quad (4.1)$$

и

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \quad (4.2)$$

при условии, что $F \ll \mu / r^2$. То есть в качестве невозмущенного движения принимается кеплеровское движение. Еще раз заметив, что иногда в небесной механике в качестве невозмущенного движения выбирают и другие случаи движения с интегрируемыми уравнениями, мы далее будем исходить из уравнений (4.1) и (4.2). При этом, напомним, уравнения невозмущенного движения имеют такое общее решение:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\Omega \cos u - \sin\Omega \sin u \cos i \\ \sin\Omega \cos u + \cos\Omega \sin u \cos i \\ \sin u \sin i \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad u = \omega + v, \quad \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (4.4)$$

Основная идея введения понятий невозмущенного и возмущенного движений состоит в том, чтобы, исходя из решения уравнений невозмущенного движения, получить приближенное решение уравнений возмущенного движения.

4.1. Метод оскулирующих элементов

4.1.1. Основы метода. Если есть начальные условия

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0), \quad (4.5)$$

то орбиты возмущенного и невозмущенного движений будут проходить через одну и ту же точку \vec{r}_0 и иметь в этой точке одну и ту же касательную с направлением $\dot{\vec{r}}_0$. Поэтому на малом интервале времени $t_0 - \Delta t < t < t_0 + \Delta t$ возмущенная орбита будет достаточно мало отличаться от орбиты невозмущенной (это различие будет малой более высокого порядка, нежели величина Δt). Количественно при данной величине интервала Δt малость различия орбит будет зависеть от степени выполнения неравенства $F \ll \mu / r^2$. Однако то же самое мы будем иметь и в такой же окрестности момента времени $t_1 = t_0 + 2\Delta t$, если найти решение уравнений обоих движений для начальных условий \vec{r}_1 и $\dot{\vec{r}}_1$. В целом возмущенное движение на конечном отрезке времени $t_0 < t < t_n$ можно приближенно представить набором невозмущенных кеплеровских движений на промежутках $t_k - \Delta t < t < t_k + \Delta t$, каждый из которых будет иметь свои начальные условия и, соответственно, свои значения элементов орбиты (рис. 4.1). При этом эти значения элементов

для соседних аппроксимирующих кеплеровских движений будут мало отличаться одни от других.

Если же сделать предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$, то каждому моменту времени t будет соответствовать кеплеровское движение такое, что его радиус-вектор \vec{r} и вектор скорости $\dot{\vec{r}}$ будут совпадать с радиусом-вектором и вектором скорости возмущенного движения. Каждое из этих кеплеровских движений будет иметь свои элементы орбиты, то есть эти элементы превратятся теперь в непрерывные функции времени $\Omega(t)$, $\omega(t)$, ... $\tau(t)$. Мы будем иметь бесконечную последовательность кеплеровских орбит, каждая из которых в соответствующей точке будет касаться возмущенной орбиты. Или, как говорят в таких случаях в геометрии, возмущенная орбита будет *огибающей* семейства невозмущенных кеплеровских орбит. С аналитической же точки зрения мы пришли к идее отыскания решения уравнений возмущенного движения методом вариации произвольных постоянных, таковыми являются элементы орбиты невозмущенного движения. В небесной механике, в ходе развития которой этот метод и возник, он получил название метода оскулирующих орбит или оскулирующих элементов.

Оскулирующее движение – это такое невозмущенное движение, которое в каждый момент времени t имеет радиус-вектор $\vec{r}(t)$ и скорость $\dot{\vec{r}}(t)$ такие же самые, как и в исследуемом возмущенном движении. Его элементы, являющиеся переменными величинами, – *оскулирующие элементы*, его орбита – *оскулирующая орбита*. Интересно происхождение этого термина. Он происходит от латинского слова “*поцелуй*” – возмущенная орбита в каждой своей точке “*целуется*” с соответствующей кеплеровской орбитой.

С методом вариации произвольных постоянных читатель, по-видимому, сталкивался в теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и произвольной правой частью. Там этот метод приводит к системе линейных же дифференциальных уравнений для варьируемых произвольных постоянных, и решение которой всегда находится в квадратурах. В нашем же случае этот метод означает переход от уравнений (4.1) в координатах к системе шести дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов:

$$\frac{dE_i}{dt} = \Phi_i(t, E_j(t)), \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.6)$$

где E_i или E_j – один из элементов кеплеровской орбиты. Заметим, что варьируются не обязательно именно кеплеровские элементы, это может быть и какой-либо другой набор элементов орбиты, например, элементы Якоби. Оскулирующее движение может при этом быть, вообще говоря, любого типа – эллиптическое, гиперболическое и так далее. Но, имея в виду прежде всего движение планет и их спутников, будем далее считать, что это движение эллиптическое.

Интегрируется ли система уравнений (4.6) в конечном виде? Если нет, то какой смысл в применении метода вариации произвольных постоянных к решению задачи двух тел? Для того, чтобы ответить на эти вопросы, нужно

сначала получить уравнения для оскулирующих элементов в явном виде. Сделать это можно разными способами. Один из них основан на использовании первых интегралов. Если функция $\Psi(t, \vec{r}(t, E_i), \dot{\vec{r}}(t, E_i)) = C$ есть первый интеграл уравнений невозмущенного движения (4.2), то функция $\Psi(t, \vec{r}(t, E_i(t)), \dot{\vec{r}}(t, E_i(t))) = C$ будет первым интегралом уравнений возмущенного движения (4.1). Найдем первые производные по времени t от обоих этих первых интегралов:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \dots = 0, \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \dots + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\Psi}{\partial E_i} \frac{dE_i}{dt} = 0.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Координаты и скорости в обоих равенствах (4.7) совпадают, а разность ускорений равняется возмущающему ускорению \vec{F} . Поэтому, вычитая первое равенство из второго, получим, что

$$\sum_{i=0}^6 \frac{\partial\Psi}{\partial E_i} \frac{dE_i}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{x}} F_x + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{y}} F_y + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{z}} F_z = 0. \quad (4.8)$$

Найденное уравнение – это линейное алгебраическое уравнение относительно производных от оскулирующих элементов по времени. Имея шесть независимых первых интегралов, из системы шести уравнений типа (4.8) можно найти эти производные, то есть получить систему дифференциальных уравнений (4.6). Таким образом, из трех компонент интеграла момента сравнительно просто находятся уравнения для элементов Ω , ω и i . Однако нахождение таким способом остальных трех уравнений требует более громоздких вычислений.

Аналитическая механика предлагает для перехода от уравнений движения в координатах к уравнениям в оскулирующих элементах некоторый стандартный аппарат – скобки Лагранжа. Но его применение также требует весьма громоздких выкладок. Мы пойдем другим путем. Сначала рассмотрим случай, когда возмущающая сила \vec{F} потенциальна, то есть существует возмущающий потенциал R , и сила $\vec{F} = \text{grad}R$. При этом мы используем решение задачи двух тел, полученное методом Гамильтона–Якоби, найдем уравнения для оскулирующих элементов Якоби, а потом перейдем к уравнениям для элементов Кеплера, и, наконец, рассмотрим общий случай.

4.1.2. Уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов. Мы нашли решение задачи двух тел в элементах Якоби и установили их связь с элементами Кеплера (см. раздел 3.3). Напомним соотношения, связывающие эти две системы элементов орбиты в задаче двух тел:

$$\Omega = \beta_3, \quad \omega = \beta_2, \quad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad p = \frac{\alpha_2^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, \quad \tau = -\beta_1; \quad (4.9)$$

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1), \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\mu p} \cos i, \quad \beta_1 = -\tau, \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega. \quad (4.10)$$

Элементы Якоби в возмущенном движении соответствуют функции Гамильтона $H = H_0 - R$, где H_0 – функция Гамильтона невозмущенного движения (3.72), к которой нужно прибавить потенциальную энергию возмущения, равную $U_1 = -R$. Элементы α_i и β_i в возмущенном движении являются канонически сопряженными переменными. Это вытекает из соотношений (3.86) – (3.88), поэтому они еще называются *каноническими элементами*. Если применить к элементам Якоби какое-либо каноническое преобразование, то получим новую систему канонических элементов. В небесной механике используются также канонические элементы Делоне (см. подраздел 5.2.2) и первая и вторая системы канонических элементов Пуанкаре.

Уравнения Гамильтона, которым удовлетворяют канонические переменные α_i и β_i , таковы:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i}. \quad (4.11)$$

Но, поскольку гамильтониан невозмущенного движения H_0 приводит к постоянным значениям элементов α_i и β_i , то уравнения (4.11) переходят в уравнения

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}. \quad (4.12)$$

Теперь нужно в уравнениях (4.12) перейти от оскулирующих элементов Якоби к оскулирующим элементам Кеплера с помощью соотношений (4.9) и (4.10). Дифференцируя формулы (4.9) по времени, будем иметь, учитывая (4.10):

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{d\beta_3}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\beta_2}{dt}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\beta_3}{dt}, \quad \frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{d\alpha_2}{dt}, \\ \sin i \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_3}{dt} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_2}{dt}, \quad \frac{de}{dt} = \frac{p}{\mu e} \frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_2}{dt}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

А найдя производные от возмущающего потенциала R по элементам Якоби с помощью (4.10), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} &= -\frac{\partial R}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_2} = \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_3} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = -\frac{\mu(e^2 - 1)}{2p^2} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{\mu e}{p} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{\partial R}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos i \frac{\partial R}{\partial p} - \sqrt{\mu p} \sin i \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Подставив теперь (4.14) в (4.12), а потом (4.12) в (4.13), получим систему дифференциальных уравнений для оскулирующих кеплеровских элементов – уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
\frac{dp}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} - 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial e}, \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial \tau}, \\
\frac{d\tau}{dt} &= \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Эти уравнения пригодны при любом типе оскулирующего движения. В подразделе 2.2.1 мы ввели систему эллиптических элементов $\Omega, \omega, i, a, e, \tau$. Пользуясь определениями долготы перицентра и средней долготы в начальную эпоху

$$\pi = \Omega + \omega, \quad \varepsilon = \pi + M_0 \tag{4.16}$$

и соотношениями

$$M_0 = n(t_0 - \tau), \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, \quad p = a(1 - e^2), \tag{4.17}$$

можно перейти от уравнений (4.15) для общих кеплеровских элементов к уравнениям для эллиптических элементов. Система уравнений Лагранжа для эллиптических оскулюирующих элементов имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{1}{na^2} \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1}{na^2} \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial e},
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Обратим внимание на структуру правых частей уравнений Лагранжа. Эти правые части являются линейными функциями частных производных от возмущающего потенциала по оскулюющим элементам. При этом коэффициент при производной по элементу E_1 в уравнении для элемента E_2 только знаком отличается от коэффициента при производной по элементу E_2

в уравнении для элемента E_1 . Наконец, системы уравнений (4.15) и (4.18) проявляют некоторую квазиканоничность. В уравнения системы (4.18) для элементов a, e, i входят производные от потенциала R только по элементам Ω, π, e и наоборот. В системе (4.15) такими квазиканоническими группами элементов являются p, e, i и Ω, ω, τ .

4.2.2. Уравнения Ньютона для оскулирующих элементов. Уравнения Лагранжа применяются весьма широко, прежде всего тогда, когда возмущающая сила – это сила тяготения. Но тогда, когда возмущающая сила – это сила сопротивления среды, например, сила сопротивления атмосферы планеты движению ее искусственного спутника, то эти уравнения уже не пригодны. Поэтому нужно рассмотреть более общий случай, когда возмущающая сила \vec{F} задается своими компонентами X, Y, Z в некоторой системе координат x, y, z . При этом ясно, что вид системы уравнений для оскулирующих элементов в компонентах возмущающей силы не должен зависеть от того, потенциальна эта сила или нет. Поэтому искоющую систему можно получить из системы уравнений (4.15), если перейти от производных от возмущающего потенциала к компонентам возмущающей силы на основе того условия, что $\vec{F} = \text{grad}R$, то есть

$$X = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (4.19)$$

Если обозначить какой-либо из элементов оскулирующей орбиты как E , то

$$\frac{\partial R}{\partial E} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial E} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial E} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial E} = X \frac{\partial x}{\partial E} + Y \frac{\partial y}{\partial E} + Z \frac{\partial z}{\partial E}. \quad (4.20)$$

Обращаясь к формулам (4.3) и (4.4), увидим, что модуль радиуса-вектора \vec{r} зависит только от элементов p, e, τ , а его направляющие косинусы α, β, γ – только от элементов Ω, π, e . Поэтому для элементов p, e, i производные

$$\frac{\partial x}{\partial E} = \alpha \frac{\partial r}{\partial E}, \quad \frac{\partial y}{\partial E} = \beta \frac{\partial r}{\partial E}, \quad \frac{\partial z}{\partial E} = \gamma \frac{\partial r}{\partial E}, \quad (4.21)$$

а для элементов Ω, ω, i –

$$\frac{\partial x}{\partial E} = r \frac{\partial \alpha}{\partial E}, \quad \frac{\partial y}{\partial E} = r \frac{\partial \beta}{\partial E}, \quad \frac{\partial z}{\partial E} = r \frac{\partial \gamma}{\partial E}. \quad (4.22)$$

Вычисляя производные от величин α, β, γ по элементам Ω, ω, i получим, что

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega}, \frac{\partial \beta}{\partial \Omega}, \frac{\partial \gamma}{\partial \Omega} \right) = (-\beta, \alpha, 0), \quad (4.23)$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \omega}, \frac{\partial \beta}{\partial \omega}, \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} \right) = (\alpha', \beta', \gamma'), \quad (4.24)$$

где α', β', γ' – это компоненты орта \vec{r}_\perp^0 , который направлен в плоскости оскулирующей орбиты перпендикулярно орту \vec{r}^0 , а

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial i}, \frac{\partial \beta}{\partial i}, \frac{\partial \gamma}{\partial i} \right) = (\alpha'', \beta'', \gamma''), \quad (4.25)$$

где $(\alpha'', \beta'', \gamma'') = \vec{R} = \vec{c}/c$, то есть это орт, перпендикулярный к плоскости оскулирующей орбиты. Выражение (4.23) вытекает непосредственно из формул (4.3), выражение (4.24) учитывает то, что дифференцирование функций синус и косинус эквивалентно применению формул приведения от аргумента $90^\circ + u$, то есть повороту вектора на 90° . И, наконец, выражение (4.25) следует непосредственно из (2.48).

Если ввести систему координат S, T, W , систему, которая определяется ортами $\vec{r}^0, \vec{r}_\perp^0, \vec{R}$ (так называемую *естественную систему координат*, см. рис. 4.2), то матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

будет матрицей направляющих косинусов системы координат S, T, W относительно системных, $у, z$. Это означает, что, обозначив компоненты возмущающей силы \vec{F} в новой системе координат также буквами S, T, W , можно записать соотношение, связывающее компоненты с компонентами X, Y, Z :

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \cdot Y + \begin{pmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{pmatrix} \cdot Z. \quad (4.26)$$

Теперь, соединяя (4.20) с (4.23) – (4.25), находим, что производные от возмущающего потенциала R элементам Ω, ω, i равны:

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = rT, \quad \frac{\partial R}{\partial i} = r \sin u \cdot W, \quad \frac{\partial R}{\partial \Omega} = r(-\beta X + \alpha Y) = r(\cos i \cdot T - \cos u \sin i \cdot W). \quad (4.27)$$

Для получения последнего из выражений (4.27) нужно обратить внимание на то, что выражение в скобках является z -компонентой векторного произведения $\vec{F} \times \vec{r}^0$ и найти выражение для этой компоненты в системе S, T, W . Подставляя найденные производные в уравнения (4.15), получим уравнения для оскулирующих элементов Ω, p, i . При нахождении производных от расстояния r по элементам p, e, τ необходимо учитывать не только явную зависимость величины r от p и e , а и неявную – через истинную аномалию $v(p, e, \tau)$. Поэтому их вычисление более громоздкое, но и оно дает линейную зависимость от компонент возмущающей силы S, T, W для производных от потенциала R по элементам p, e, τ . Подставляя выражения для всех шести производных от возмущающего потенциала по элементам в уравнения (4.15), получим в конце концов такую систему дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов в случае произвольной возмущающей силы:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i} \tilde{W}, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u \tilde{W}, \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos v}{e} \tilde{S} + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} - \frac{r}{p} \sin u c t g i \tilde{W}, \\
\frac{dp}{dt} &= 2r \tilde{T}, \\
\frac{de}{dt} &= \sin v \tilde{S} + \left[\cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] \tilde{T}, \\
\frac{d\tau}{dt} &= \frac{r^2}{e \sqrt{\mu p}} \left[(eN \sin v - \cos v) \tilde{S} + \frac{p}{r} N \tilde{T} \right],
\end{aligned} \tag{4.28}$$

где для сокращения записи введены обозначения:

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T, \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W, \quad N = \int_0^v \frac{\cos v}{(1 + \cos v)^3} dv.$$

Так как представление об уравнениях (4.28) имел еще И. Ньютона, изучая возмущенное движение Луны, то эти уравнения носят название *уравнений Ньютона для оскулирующих элементов*.

Коэффициенты в правых частях уравнений (4.15), (4.18) и (4.28) зависят от времени через орбитальные координаты r и v , но поскольку расстояние r выражается через v с помощью уравнения орбиты, эти коэффициенты являются функциями истинной аномалии v . Поэтому может быть целесообразным переход в уравнениях для оскулирующих элементов от независимой переменной t к независимой переменной v . Для этого нужно найти полную производную dv/dt . Эта производная оказывается равной

$$\frac{dv}{dt} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} + \frac{\cos v}{e} \tilde{S} - \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T}. \tag{4.29}$$

От уравнений Ньютона (4.28) можно перейти к уравнениям для других элементов, например, для эллиптических элементов. Все эти разновидности дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов можно найти в справочнике [38]. В частности, для большой полуоси такое уравнение имеет вид:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2ae \sin v}{1 - e^2} \tilde{S} + \frac{2a^2}{r} \tilde{T}. \tag{4.30}$$

4.2. Интегрирование уравнений возмущенного движения

4.2.1. Приближенное интегрирование уравнений для оскулирующих элементов. Системы уравнений (4.15), (4.18) и (4.28) нелинейные как по аргументу – времени, так и по искомым функциям – оскулирующим элементам, и поэтому не интегрируемы в конечном виде. Почему же тогда они лежат в основе всей теории возмущенного движения в небесной механике? Вопрос тем более естественный потому, что каждая из этих

систем уравнений весьма громоздкая в сравнении с очень компактной системою (4.1) уравнений возмущенного движения в координатах. Ответ вытекает из самого понятия возмущенного движения, которое связано с выполнением неравенства $F \ll \mu / r^2$. В этом случае компоненты возмущающей силы S, T, W также являются величинами, малыми по модулю. А значит, малы и правые части уравнений для оскулирующих элементов. Это означает, что сами оскулирующие элементы являются функциями, изменяющимися очень медленно в отличие координат движущейся точки. Поэтому *уравнения движения в оскулирующих элементах типа (4.6) гораздо предпочтительнее для любого метода приближенного интегрирования*, нежели уравнения движения в координатах (4.1).

Основными аналитическими методами приближенного интегрирования являются метод итераций и метод малого параметра. В *методе итераций* последующее приближение

$$E_i^{(k)} = E_{i0} + \int_{t_0}^t \Phi_i(t, E_j^{(k-1)}(t)) dt. \quad (4.31)$$

В качестве начального приближения $E_i^{(0)}$ выбирают обычно начальные условия E_{i0} . Если правые части уравнений типа (4.6) зависят от какого-либо малого параметра σ (например, отношения массы возмущающей планеты к массе Солнца), то, имея степенной ряд

$$\Phi_i(t, E_j, \sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \Phi_i^{(k)}(t, E_j), \quad (4.32)$$

можно построить ряд

$$E_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \tilde{E}_i^{(k)}(t), \quad (4.33)$$

где коэффициенты ряда (4.33) могут быть найдены с помощью квадратур:

$$\tilde{E}_i^{(k)}(t) = \int_{t_0}^t E_i^{(k)}(t, \tilde{E}_j^{(0)}, \dots, \tilde{E}_j^{(k-1)}) dt, \quad (4.34)$$

а $E_i^{(k)}$ – некоторые полиномы от величин $E_j^{(0)}, \dots, \tilde{E}_j^{(k-1)}$ которые являются уже известными функциями времени. Нетрудно убедиться, что первые приближения в обоих этих методах приближенного интегрирования будут одинаковыми и равными

$$E_i^{(1)} = E_{i0} + \int_{t_0}^t \Phi_i(t, E_{j0}) dt, \quad (4.35)$$

приближения же высших порядков уже совпадать не будут.

Эти же самые методы применимы и к уравнениям движения в координатах. Но при интегрировании уравнений в оскулирующих элементах понадобится значительно меньше итераций (4.31) или членов ряда (4.33) для достижения заданной точности, или при том же числе итераций или членов ряда будет достигнута значительно большая точность, нежели при использовании уравнений в координатах.

В случае численного интегрирования уравнений движения на заданном интервале времени при интегрировании уравнений типа (4.6) благодаря малости производных dE_i/dt можно будет взять значительно больший шаг интегрирования при заданной точности или получить значительно большую точность при заданном шаге, нежели при интегрировании уравнений (4.1).

Кроме того, поскольку каждый из элементов орбиты несет свою определенную информацию о движении, то те или другие особенности возмущающей силы могут приводить к частичному интегрированию или, по крайней мере, к упрощению системы уравнений для оскулирующих элементов. Наглядным примером такой ситуации может быть движение искусственного спутника под действием сопротивления атмосферы планеты. Сила сопротивления направлена в сторону, противоположную вектору скорости, и, соответственно, лежит в плоскости оскулирующей орбиты. Поэтому ее компонента $W=0$. Из системы уравнений Ньютона (4.28) видно, что уравнения для долготы узла Ω и наклонения орбиты i интегрируются тривиально, а уравнение дляperiцентрового расстояния ω упрощается. Получаем, что $\Omega=\Omega_0$ и $i=i_0$, а это означает, что плоскость движения остается неизменной.

Дифференцируя координаты по элементам орбиты, можно с помощью уравнений в оскулирующих элементах найти приближенные выражения для координат как функций компонент возмущающей силы или производных от возмущающего потенциала по элементам (см., например, [45]).

4.2.2. Вековые и периодические возмущения. Малость возмущающей силы по сравнению с центральной ньютоновской проявляет себя весьма эффективно, если применить к уравнениям движения в оскулирующих элементах возможность разложения всех характеристик эллиптического движения в ряды. При этом имеются в виду ряды Фурье по средней аномалии, ибо значения оскулирующего эксцентриситета орбиты заранее неизвестны, и нужно использовать ряды, сходящиеся при всех значениях эксцентриситета.

Итак, допустим, что мы имеем разложение правых частей уравнений для оскулирующих элементов в ряды Фурье:

$$\frac{dE}{dt} = A_o(E_j) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(E_j) \cos kM + B_k(E_j) \sin kM), \quad (4.36)$$

(индекс i слева для простоты записи опущен). Если малы правые части этих уравнений, то тем более малыми будут коэффициенты ряда (4.36). И для получения первого приближения решения уравнений (4.36) нужно вычислить коэффициенты A_k, B_k при начальных значениях элементов E_{j0} . Будем иметь:

$$\frac{dE^{(1)}}{dt} = A_0^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(0)} \cos kM + B_k^{(0)} \sin kM). \quad (4.37)$$

Если вспомнить теперь, что $M = n_0(t - t_0) + M_0$, то уравнения (4.37) легко интегрируются, и первое приближение для элемента E будет таким:

$$E^{(1)} = E_0 + A_0^{(0)}(t - t_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{A_k^{(0)}}{kn_0} \sin kM + \frac{B_k^{(0)}}{kn_0} \cos kM \right) \Big|_{t_0}^t. \quad (4.38)$$

Рассмотрим структуру полученного выражения (4.38). Кроме постоянного слагаемого E_0 , оно содержит линейный по времени член $A_0^{(0)}(t - t_0)$ и бесконечное количество периодических членов. Хотя коэффициент $A_0^{(0)}$ мал по модулю, произведение $A_0^{(0)}(t - t_0)$ неограниченно возрастает со временем. Периодические члены образуют сходящийся ряд с малой суммой, причем такой ряд, который сходится быстрее, нежели исходный ряд (4.37). Разность $\delta E^{(1)} = E^{(1)} - E_0$ – это *возмущение элемента* E , в данном случае *возмущение первого порядка*. Существенно то, что влияние на возмущение в целом линейного члена и суммы периодических будет принципиально различным. Периодические члены описывают лишь относительно небольшие количественные отклонения возмущенного движения от невозмущенного, которые к тому же периодически обращаются в нуль. За счет же линейного члена за достаточно большое время изменение соответствующего элемента орбиты может существенно повлиять на характер возмущенного движения. Так, например, почти круговая начальная орбита может превратиться в сильно вытянутый эллипс, может значительно измениться наклонение орбиты и тому подобное. Линейные члены в возмущениях первого порядка называются *вековыми возмущениями*. Периодические члены в (4.38) – это *периодические возмущения*. Если подставить первое приближение (4.38) в уравнения (4.36), то можно получить возмущения второго порядка, которое будет включать, кроме периодических возмущений, квадратичные по времени вековые возмущения, а также произведения линейных множителей на тригонометрические – *смешанные возмущения*, то есть периодические возмущения, но со всеми возрастающими со временем амплитудами. Но во всяком случае, если нам нужно достаточно точное количественное описание возмущенного движения, то нам необходимо иметь вековые и смешанные возмущения и достаточное количество первых периодических возмущений. Если же нас интересует лишь качественный анализ отличий возмущенного движения от невозмущенного, то достаточно ограничиться только вековыми возмущениями, прежде всего первого порядка. При этом важным и полезным является установление факта отсутствия вековых возмущений, который в первом приближении будет иметь место тогда, когда соответствующий коэффициент $A_0^{(0)} = 0$.

Однако при определенных обстоятельствах качественное соотношение между вековыми и периодическими возмущениями, о котором говорилось выше, может нарушаться. Рассмотрим так называемую *двухпланетную задачу*, то есть задачу о взаимном возмущении движения планеты m_1 планетой m_2 и наоборот. Тогда возмущающая сила и ее потенциал являются функциями от координат обеих планет и, тем самым, являются периодическими функциями от средних аномалий этих планет M_1 и M_2 .

Теперь уравнения для первого приближения какого-либо элемента орбиты возмущаемой планеты m_1 будет таким:

$$\frac{dE_1^{(1)}}{dt} = A_0^{(0)}(M_2) + \sum_{k_1=1}^{\infty} \left(A_{k_1}^{(0)}(M_2) \cos k_1 M_1 + B_{k_1}^{(0)}(M_2) \sin k_1 M_1 \right), \quad (4.39)$$

где каждый из коэффициентов $A_{k_1}^{(0)}$ может быть разложен в ряд Фурье по средней аномалии M_2 :

$$A_{k_1}^{(0)} = A_{k_1,0}^{(0)} + \sum_{k_2}^{\infty} \left(A_{k_1,k_2}^{(0)} \cos k_2 M_2 + B_{k_1,k_2}^{(0)} \sin k_2 M_2 \right), \quad (4.40)$$

аналогичный ряд может быть получен и для коэффициентов $B_{k_1}^{(0)}$. Если подставить ряды для коэффициентов $A_{k_1}^{(0)}$, $B_{k_1}^{(0)}$ в ряд (4.39), то после определенных его преобразований получим двойной ряд Фурье:

$$\frac{dE_1^{(1)}}{dt} = A_{0,0}^{(0)} + \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} \left(A_{k_1,k_2}^{(0)} \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2) + B_{k_1,k_2}^{(0)} \sin(k_1 M_1 + k_2 M_2) \right). \quad (4.41)$$

Обратим внимание на очень важное обстоятельство. При получении ряда (4.41) нужно было перейти от произведений синусов и косинусов к синусам и косинусам сумм, а для этого нужно было иметь произведения этих функций с определенными знаками в соответствии с формулами синуса и косинуса суммы. Этого можно достичь, если при необходимости изменять знак коэффициента, вводя в рассмотрение отрицательные частоты k_1 или k_2 . Поэтому в двойном ряде Фурье (4.41) индексы суммирования пробегают уже значения не от 0 до ∞ , а от $-\infty$ до $+\infty$. После интегрирования уравнения (4.41) первое приближение для элемента E_1 принимает вид:

$$E_1^{(1)} = E_1^{(0)} + A_{0,0}^{(0)}(t - t_0) + \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{A_{k_1,k_2}^{(0)}}{k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}} \sin(k_1 M_1 + k_2 M_2) + \right. \\ \left. + \frac{B_{k_1,k_2}^{(0)}}{k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}} \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2) \right]_{t_0}^t. \quad (4.42)$$

В ряде (4.42) знаменатели в выражениях для амплитуд периодических возмущений не только не обязательно возрастают, а наоборот, могут и уменьшаться и даже обратиться в нуль. Практически, однако ввиду того, что значения средних движений n_1 , n_2 определяются в конце концов в конкретных задачах из каких-либо измерений с ограниченной точностью с одной стороны, а с другой являются хотя и медленно, но изменяющимися со временем, то может идти речь о ситуации, когда эти средние движения лишь близки к соизмеримости, то есть $n_1/n_2 \approx -k_2/k_1$. Иначе говоря, частота возмущающей силы со стороны планеты m_2 близка к соизмеримости с собственной частотой движения планеты m_1 , то есть система близка к резонансному состоянию. Ясно, что это относится и к возмущающему действию планеты m_1 на планету m_2 . В рассматриваемом случае амплитуды соответствующих гармоник ряда (4.42) возрастают и могут стать уже не малыми, возрастают и периоды этих возмущений

$$T_{k_1, k_2} = \frac{2\pi}{|k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}|}. \quad (4.43)$$

Такие почти резонансные возмущения получили названия *долгопериодических возмущений*. Эти возмущения на промежутках времени, сопоставимых с их периодами, могут по характеру их влияния на возмущенное движение не отличаться от вековых возмущений. Практическое значение имеют долгопериодические возмущения лишь с достаточно малыми частотами k_1 и k_2 . На больших частотах эффект резонанса подавляется стремлением к нулю коэффициентов $A_{k_1, k_2}^{(0)}$ и $B_{k_1, k_2}^{(0)}$, каковое является необходимым условием сходимости ряда (4.42). Известным примером долгопериодических возмущений являются взаимные возмущения в движении Юпитера и Сатурна на частотах $|k_1|=2$ и $|k_2|=5$, ибо орбитальный период Юпитера близок к 12 годам, а Сатурна – к 30 годам. Период этих возмущений – около 900 лет. Детальное рассмотрение проблемы резонансов и малых знаменателей в небесной механике можно найти в [14].

4.2.3. Эволюционные уравнения возмущенного движения. Как уже указывалось важной задачей при исследовании возмущенного движения является выделение вековых возмущений. Сделать это можно следующим образом. Из относительной малости возмущающей силы вытекает малость изменения оскулирующих элементов за некоторое характерное время. В случае эллиптического движения таким характерным временем является период обращения. Осредним уравнения для оскулирующих элементов на периоде обращения T . По определению среднего от функции на промежутке будем иметь:

$$\frac{d\bar{E}_i}{dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_i(t, E_j) dt. \quad (4.44)$$

Но при этом, имея в виду вышесказанное, будем считать элементы E_j постоянными и учитывать при вычислении интеграла (4.44) лишь прямую зависимость функций Φ_i от времени. Слева мы поменяли местами операции осреднения и дифференцирования, что можно сделать, ибо обе эти операции линейны. Если же теперь воспользоваться для правой части уравнения Φ_i рядами Фурье для них (4.36), то все периодические члены именно потому, что они периодические со средним значением, равным нулю, выпадут. И после интегрирования останутся только интегралы от свободных членов A_0 , которые после интегрирования по времени осредненных уравнений как раз и дадут вековые возмущения элементов E_i .

Практически метод осреднения в небесной механике применялся еще с конца XVIII века, в частности, в задаче об астрономической прецессии Земли. Но строгое его обоснование и, тем самым, условия его применения были даны лишь в 30-х годах XX века, когда Н. Н. Боголюбовым, Н. М. Крыловым та Ю. А. Митропольским была развита асимптотическая теория нелинейных колебаний. Обобщая ситуацию, о которой идет речь, опишем ее

в таких терминах. Есть некоторый нелинейный периодический процес с. Переменные, его описывающие, можно разделить на две группы – “быстрые” и “медленные”. “Медленные” переменные за период изменяются достаточно мало, а “быстрые” могут за период изменяться произвольным образом. Тогда дифференциальные уравнения этого процесса, осредненные последовательно по всем “быстрым” переменным (при постоянных значениях „медленных”), будут асимптотически точно описывать непериодическую вековую часть изменения “медленных” переменных. Таким образом, осредненные уравнения описывают эволюцию рассматриваемого процесса на протяжении времени, значительно большего, чем период процесса, и поэтому называются его *эволюционными уравнениями*. Последовательное осреднение по независимым “быстрым” переменным допустимо тогда, когда между ними нет резонансных соотношений (практически – близких к резонансным). Подробнее асимптотическая теория нелинейных колебаний рассматривается в [13, 43].

В нашем случае возмущенного движения „медленными“ переменными являются оскулирующие элементы, а “быстрыми” – координаты и, прежде всего, истинная аномалия. Поскольку зависимость от времени t в интеграле осреднения (4.44) идет через истинную аномалию v и зависящий от нее радиус $r(v)$, целесообразно в этом интеграле перейти от переменной интегрирования t к переменной v , учитывая, что

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}, \quad T = \frac{2\pi}{n}. \quad (4.45)$$

Тогда эволюционные уравнения приобретут следующий вид:

$$\frac{d\bar{E}_i}{dt} = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_i(r(v), v, E_j) \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} dv, \quad (4.46)$$

где, напомним, элементы E_j рассматриваются как постоянные.

Определенное упрощение в применении метода осреднения можно внести, если существует возмущающий потенциал R . Тогда в силу линейной зависимости правых частей уравнений (4.15) или (4.18) от производных $\partial R / \partial E_j$ достаточно осреднить этот потенциал, то есть найти

$$\bar{R} = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(r(v), v, E_j) \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} dv \quad (4.47)$$

и подставить производные от осредненного потенциала \bar{R} в соответствующие уравнения для оскулирующих элементов:

$$\frac{d\bar{E}_i}{dt} = \Phi_i \left(E_j, \frac{\partial \bar{R}}{\partial E_j} \right). \quad (4.48)$$

При этом осредненный потенциал \bar{R} может оказаться зависящим от меньшего числа элементов, что приводит к упрощению эволюционных уравнений, а иногда и к их частичному или даже полному интегрированию. Соответствующие примеры будут рассмотрены в следующей главе.

Неоднократно выше шла речь о малости различных величин, прежде всего правых частей уравнений для оскулирующих элементов. Уточним, о какой же малости говорится. Пусть уравнения типа (4.6) приведены к безразмерному виду. Для этого нужно уравнения для угловых переменных и эксцентризита разделить на величину с размерностью угловой скорости n , а уравнения для элементов p или a – на величину na . Тогда можно сделать такое утверждение – малые величины Φ_i и δE_i ($t \leq T$) являются малыми того же порядка малости, что малая величина Fr^2 / μ .

Дальнейшим развитием идеи метода осреднения служит, по сути, метод адиабатических инвариантов. Осредняя по периоду производную от функции Гамильтона по времени, изменение которой вызвано медленным изменением параметров системы, приходим в конце концов к существованию постоянных (в некотором приближении) величин

$$I_k = \oint p_k dq_k,$$

где p_k – обобщенный импульс, соответствующий периодической обобщенной координате q_k . Величины I_k , которые имеют название *адиабатических инвариантов*, могут быть использованы для исследования свойств и поведения динамической, в частности, небесно-механической системы.

4.3. Устойчивость движения небесных тел

4.3.1. Элементы теории устойчивости движения. Прежде чем рассматривать вопросы устойчивости движения в задачах небесной механики, остановимся на основных представлениях об устойчивости движения вообще.

Под устойчивостью какого-либо процесса понимают то, что на отклонения возмущенных его параметров от невозмущенных наложены определенные ограничения. Эти ограничения могут быть более жесткими или более слабыми. Поэтому существуют различные определения устойчивости движения. Наиболее слабым является понятие устойчивости, связываемое с именем Ж. Лагранжа. В применении к системе материальных точек *устойчивость по Лагранжу* означает, что все расстояния между точками системы Δ_{ij} конечны на протяжении времени от t_0 до ∞ , то есть система “не разваливается”. Тривиальным примером движения, устойчивого по Лагранжу, может служить эллиптическое кеплеровское движение.

Наиболее жесткое понятие устойчивости движения дал А. М. Ляпунов в своей работе “Общая задача об устойчивости движения”, вышедшей в трудах Харьковского университета в 1892 г. [27]. Для того, чтобы дать его определение, рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = X_i(t, x_i), \quad x_i^{(0)} = x_i(0), \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad (4.50)$$

где x_i – это отклонения возмущенных параметров некоторого процесса (в частности, движения материальной точки) от невозмущенных, X_i – возмущения правых частей невозмущенных уравнений (возмущающие силы),

$x_i^{(0)}$ – возмущения начальных условий. Тем самым подчеркивается, что устойчивость рассматриваемого процесса можно изучать как по отношению к возмущающим факторам исходной модели процесса, так и по отношению к начальным условиям. Процесс является *устойчивым по Ляпунову* тогда, когда все значения $|x_i(t)|$ будут малыми величинами, если малы значения $|X_i|$ или $|x_i^{(0)}|$ соответственно. Точнее говоря, это означает, что для всякого как угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $|x_i(t)| < \varepsilon$ для всех $t > t_0$, если $|X_i| < \delta$ или $|x_i^{(0)}| < \delta$.

Промежуточным является понятие устойчивости по отношению к траектории. Если ввести параметрические уравнения возмущенного и невозмущенного процессов $y_i = y_i(t)$ и $y_{0i} = y_{0i}(t)$, то можно дать такое определение. Процесс *устойчив по отношению к траектории* тогда, когда для любого малого ε будет существовать такое δ , что для любой точки на траектории y_0 найдется хоть одна точка траектории y такая, что $|y_i - y_{0i}| < \varepsilon$, если $|X_i| < \delta$ или $|x_i^{(0)}| < \delta$, хотя при этом может быть $|x_i(t)| = |y_i(t) - y_{0i}(t)| > \varepsilon$. То есть траектории возмущенная и невозмущенная близки одна к другой, но возмущенная и невозмущенная точки могут разойтись по этим траекториям на конечное расстояние, не смотря на малость возмущающих сил или возмущений начальных условий. При этом речь может идти как о траекториях материальной точки в реальном пространстве, так и о траекториях изображающей точки в фазовом пространстве рассматриваемого процесса.

Если система (4.49) интегрируема в конечном виде, то заключение об устойчивости или неустойчивости можно сделать, анализируя ее решение. Если эта система линейна, то это определяется характером корней ее характеристической системы. Если среди этих корней есть хотя бы один вещественный положительный или комплексный с положительной вещественной частью, то движение будет неустойчивым. Соответствующее возмущение будет со временем неограниченно возрастать по модулю. В остальных случаях движение будет устойчивым. На протяжении XVIII–XIX веков устойчивость нелинейных систем исследовали, заменяя эти системы их линейными приближениями и считая, что характер их устойчивости или неустойчивости при этом не изменится. Однако можно привести элементарный пример, показывающий, что это, вообще говоря, не так. Возьмем уравнение

$$\dot{x} = \varepsilon \sin t, \quad x(0) = 0. \quad (4.51)$$

Его точное решение $x = \varepsilon(1 - \cos t)$. Решение этого уравнения в линейном приближении ($\dot{x} = \varepsilon t$) будет равно $x = \varepsilon t^2 / 2$. Видно, что линейное приближение неустойчиво, в то время как точное решение – устойчиво.

В осознании того, что нельзя по линейному приближению делать окончательного вывода об устойчивости нелинейного процесса, а главное, в разработке методов исследования этого вопроса в случае неинтегрируемости

соответствующей системы уравнений состоит заслуга А. М. Ляпунова как основателя теории устойчивости движения. Чтобы дать представление об этой теории, сформулируем *основную* (так называемую первую) *теорему Ляпунова об устойчивости движения*. Но перед этим нам нужно ввести понятия о *знакоопределенной* и *закопостоянной* функциях. Функция $V(t, x_i)$ такая, что в окрестности точки $t = 0, x_i$ она принимает значения лишь одного знака или нулевые, называется *закопостоянной*. Если же функция $V(t, x_i)$ в этой окрестности принимает значения только одного знака, то она является *знакоопределенной*. Тогда имеет место следующая теорема:

Если можно найти такую функцию $V(t, x_i)$, которая при $x_i(t)$, удовлетворяющих уравнениям для возмущений (4.49), является функцией закоопределенной, а ее полная производная по времени есть функция закопостоянная противоположного знака или тождественно равная нулю, то возмущенное движение будет устойчивым.

Другие теоремы Ляпунова определяют условия неустойчивости динамической системы* и ее асимптотической устойчивости или неустойчивости, то есть такой ситуации, когда соответствующие неравенства начинают выполняться лишь при $t > t_1$, где t_1 – некоторое достаточно

*Динамическая система – это система, которая описывается конечным количеством параметров, изменение которых определяется системой обычных дифференциальных уравнений.

большое значение времени t . Нужно однако отметить, что теория не дает общего способа построения функции Ляпунова, ее приходится отыскивать особо в каждой конкретной задаче. Но нередко такая функция так или иначе связана с энергией исследуемой системы. Простой пример этого – известные условия устойчивости и неустойчивости положений равновесия математического маятника – минимум и максимум его потенциальной энергии.

А. М. Ляпунов исследовал и связь между устойчивостью движения в первом (линейном) приближении и устойчивостью точного решения нелинейной системы. Если система стационарна, то есть все правые части уравнений (4.49) не зависят явно от времени, то при всех отрицательных вещественных частях корней соответствующей характеристической системы устойчивым будет и движение, описываемое точным решением. При хотя бы одной положительной, а всех других отрицательных частях, движение будет неустойчивым. И, наконец, при хотя бы одной вещественной части, равной нулю, вывод о характере движения по линейному приближению сделать нельзя. Для дальнейшего ознакомления с теорией устойчивости движения можно обратиться к книгам [18, 27].

Другим важным для небесной механики направлением качественного исследования нелинейных систем является изучение условий существования периодических возмущенных движений. Современный этап этих исследований был начат также работами А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре. Исследовался такой вопрос. Пусть система уравнений движения зависит от

некоторых параметров, и известно, что при определенных значениях этих параметров существует периодическое решение системы (так называемое *порождающее решение*). Существует ли периодическое решение, если эти параметры принимают значения из достаточно малой окрестности точки, в которой такое решение имеется. А. М. Ляпунов изучал случай, когда есть целая область значений параметров с периодическими решениями, а А. Пуанкаре – случай, когда есть лишь один такой набор значений параметров. Приведем, как пример, теорему Пуанкаре о существовании периодического возмущенного движения в случае, когда система зависит только от одного параметра.

Пусть мы имеем порождающее решение $\varphi_i(t)$, и исследуемое решение $x_i = \Phi_i(t, \mu, \beta_j)$, где μ – малый параметр, а $\beta_j = x_j(t_0) - \varphi_j(t_0)$ – это возмущения начальных условий. Необходимым и достаточным условием периодичности решения x_i с периодом T является соотношение $\Phi(t_0 + T, \mu, \beta_j) - \Phi(t_0, \mu, \beta_j) = 0$. Введем такие обозначения:

$$\begin{aligned}\psi_i(\mu, \beta_j) &= \Phi_i(t_0 + T, \mu, \beta_j) - \Phi_i(t_0, \mu, \beta_j), \\ \Delta(\mu, \beta_j) &= \frac{D(\psi_i)}{D(\beta_j)},\end{aligned}\tag{4.52}$$

где $\Delta(\mu, \beta_j)$ – якобиан функций $\psi_i(\mu, \beta_j)$. Тогда имеет место такая теорема Пуанкаре:

Если $\Delta(\mu, \beta_j)|_{\beta_j=\mu=0} \neq 0$, то при достаточно малых значениях $|\mu|$ существует единственное периодическое решение с периодом T , аналитическое относительно μ и такое, что обращается в порождающее решение $\varphi(t)$ при $\mu=0$.

Подробнее о результатах А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре можно узнать из [16, 32]. Дальнейшие исследования проблемы периодических решений принадлежат А. Н. Колмогорову и В. И. Арнольду (см. [4]).

Еще одним направлением в качественном исследовании динамических систем и, прежде всего, задачи многих тел является изучение *сингулярностей* – особых решений, когда движение некоторых точек системы продолжается лишь конечное время. Это могут быть или столкновения материальных точек, или их уход на бесконечность за конечное время. Еще в конце XIX века французский математик и механик П. Пенлеве доказал, что в задаче трех тел возможны только столкновительные сингулярности и выдвинул гипотезу о том, что в задачах большего числа тел возможны и бесстолкновительные сингулярности. Доказана соответствующая теорема была лишь в конце XX века [16].

В последние десятилетия развитие теории нелинейных систем привело к открытию таких систем, характер движения которых изменяется в ходе эволюции этих систем, – они могут переходить из состояния устойчивости в неустойчивое состояние, в состояние так называемого динамического хаоса. *Динамический хаос* – это неустойчивость, связанная с тем, что аттрактором

(местом притяжения) устойчивых решений системы является не точка (полюс, узел), а некоторая область фазового пространства параметров системы, которая получила название *странный аттрактор*. При этом изображающая точка, попадая в странный аттрактор, попадает в малую окрестность любой его точки бесконечное количество раз с некоторой вероятностью. Таким образом, приходится для системы с конечным числом степеней свободы переходить от динамического ее описания к статистическому.

4.3.2. Устойчивость движения в задаче многих тел. В связи с неинтегрируемостью уравнений задачи многих тел в конечном виде ее качественный анализ наряду с разработкой методов приближенного интегрирования является одной из важных проблем небесной механики. В частности, с точки зрения изучения эволюции систем небесных тел большое значение имеет проблема устойчивости движения.

Начнем с рассмотрения устойчивости движения по Лагранжу. Необходимые условия такой устойчивости вытекают из соотношений (1.47) и (1.48), которые являются следствиями первых интегралов задачи многих тел. Была введена величина

$$R_0 = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j \Delta_{ij}^2, \quad (4.53)$$

ограниченность которой гарантирует устойчивость системы материальных точек по Лагранжу. Если не происходит столкновения этих точек, то силовая функция системы U ограничена сверху. Пусть $U \leq A$, тогда из (1.47) вытекает неравенство

$$\ddot{R}_0 \leq 2A + h', \quad (4.54)$$

где h' – удвоенная полная энергия системы в барицентрической системе координат. Дважды интегруя это неравенство, увидим, что оценка сверху величины R_0 является квадратичной функцией со старшим коэффициентом, который равен $2A + h'$. Теперь видно, что необходимым условием устойчивости нашей системы по Лагранжу – это отрицательное значение энергии h' , ибо, если величина $2A + h' < 0$, то функция R_0 , а значит, и значения расстояний Δ_{ij} будут ограничены сверху.

Шагом в дальнейшем исследовании этого вопроса стала *теорема Лапласа об отсутствии вековых возмущений* в определенном случае задачи многих тел. А именно, дальше будем рассматривать в этом подразделе системы типа Солнечной, то есть такие, в которых масса одной точки значительно больше масс всех других точек системы ($m_0 \gg m_1, m_2, \dots, m_n$). В этом случае относительное движение точек m_1, m_2, \dots, m_n можно рассматривать как возмущенное и применить для его описания метод оскулирующих орбит. Для доказательства теоремы Лапласа воспользуемся эллиптической системой оскулирующих элементов (4.18). Разложим возмущающую функцию R задачи многих тел в ряд Фурье

$$R = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kM + B_k \sin kM) \quad (4.55)$$

и обратим внимание на то, что коэффициенты Фурье этого ряда не зависят от средней долготы в начальную эпоху ε , ибо последняя входит лишь в выражение для средней аномалии

$$M = n(t - t_0) + \varepsilon - \pi. \quad (4.56)$$

Соответственно с этим уравнения первого приближения для больших полуосей будет иметь вид (см. (4.18)):

$$\frac{da^{(1)}}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} (-kA_k^{(0)} \sin kM + kB_k^{(0)} \cos kM). \quad (4.57)$$

Интегрируя (4.57), увидим, что в возмущение больших полуосей будут входить лишь периодические члены:

$$a^{(1)} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k^{(0)}}{n_0} \cos kM + \frac{B_k^{(0)}}{n_0} \sin kM \right) \Big|_{t_0}^t. \quad (4.58)$$

Теорема доказана, но только в первом приближении, а значит, лишь для некоторого конечного промежутка времени. А из определения устойчивости движения следует, что нетривиальным это понятие является как раз тогда, когда его условия выполняются именно на неограниченно большом промежутке времени. Мысль о том, что такая устойчивость все же имеет место, укрепляет *теорема Пуассона об отсутствии вековых возмущений во втором приближении* в рассматриваемой задаче. Однако, строго говоря, эти теоремы не решают окончательно вопроса об устойчивости движения по Лагранжу в задаче многих тел.

Кроме того, теоремы об отсутствии вековых возмущений больших полуосей оказываются полезными при рассмотрении другой теоремы об устойчивости движения в задаче многих тел. Поскольку условия теоремы, к которой мы переходим, более-менее выполняются в системе “Солнце – большие планеты”, то эта теорема, также доказанная П. Лапласом, известна как *теорема Лапласа об устойчивости Солнечной системы*

Если в относительной задаче многих тел с эллиптическим оскулирующим движением точек малой массы:

- 1) начальные значения эксцентриситетов и наклонений малы, то-есть $e_{k0} \ll 1, i_{k0} \ll \pi/2$;
- 2) отсутствуют вековые возмущения больших полуосей, иначе говоря, $a_k = a_{k0} + \alpha_k(t)$, где $\alpha_k/a_k \ll 1$ на промежутке времени $t_0 < t < t_1$;
- 3) величины $t_k \sqrt{\mu_k a_k}$ являются величинами одного и того же порядка, то значения эксцентриситетов $e_k(t)$ и наклонений $i_k(t)$ будут малыми на промежутке времени $t_0 < t < t_1$.

Первое условие отображает характерные черты строения Солнечной системы в современную эпоху – орбиты планет близки к круговым и мало наклонены к плоскости эклиптики. Второе условие для конечного значения t_1 вытекает из теорем об отсутствии вековых возмущений больших полуосей

планетных орбит. Более сомнительным является выполнение третьего условия, особенно, если сравнить величины $m\sqrt{\mu a}$ для Меркурия и Юпитера. Но можно считать, что оно все же выполняется по сравнению с безусловным его невыполнением для астероидов.

Иходным соотношением для доказательства теоремы об устойчивости Солнечной системы служит проекция интеграла моментов на направление вектора момента \vec{c} . Запишем это соотношение в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^n m_k \sqrt{\mu_k p_k} \cos i_k = c. \quad (4.59)$$

При этом второе слагаемое в интеграле моментов относительной задачи многих тел (1.61) отброшено в силу неравенств $m_k \ll m_0$. Вспомнив, что фокальный параметр $p = a(1 - e^2)$, перейдем в (4.59) к большим полуосям a_k :

$$\sum_{k=1}^n m_k \sqrt{\mu_k a_k (1 - e_k^2)} \cos i_k = c. \quad (4.60)$$

Второе условие теоремы дает возможность записать после некоторых преобразований, что

$$\sum_{k=1}^n m_k \sqrt{\mu_k a_{k0} (1 - e_k^2)} \cos i_k = c + \alpha, \quad (4.61)$$

где малая величина

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \alpha_k \sqrt{\mu_k (1 - e_k^2)} \cos i_k.$$

Введем в рассмотрение также постоянную

$$c_0 = \sum_{k=1}^n m_k \sqrt{\mu_k a_{k0}} \quad (4.62)$$

и возьмем разность между (4.62) та (4.60):

$$\sum_{k=1}^n m_k \sqrt{\mu_k a_{k0}} \left(1 - \sqrt{1 - e_k^2} \cos i_k \right) = c_0 - c - \alpha. \quad (4.63)$$

Разность постоянных $c_0 - c$ в силу первого условия теоремы – малая величина. При этом, конечно, размерные величины $\alpha, c_0 - c$, а значит, и $c_0 - c - \alpha$ малы по сравнению со значением полного кинетического момента системы c . Избавимся теперь от иррациональности в числителе (4.63). Будем иметь:

$$\sum_{k=1}^n m_k \sqrt{\mu_k a_{k0}} \frac{\sin^2 i_k + e_k^2 \cos^2 i_k}{1 + \sqrt{1 - e_k^2} \cos i_k} = c_0 - c - \alpha. \quad (4.64)$$

Проанализируем малую величину (4.64). Если в силу третьего условия теоремы постоянные множители $m_k \sqrt{\mu_k a_{k0}}$ одинаковы по порядку величины, то безразмерные величины

$$\frac{\sin^2 i_k + e_k^2 \cos^2 i_k}{1 + \sqrt{1 - e_k^2} \cos i_k} \quad (4.65)$$

должны быть малыми уже относительно 1. Но знаменатели в (4.65) ограничены (они меньше 2), а это означает, что малыми должны быть все

числители. Отсюда уже и вытекает утверждение теоремы Лапласа – $e_k(t) \ll 1, i_k(t) \ll \pi/2$ на промежутках времени $t_0 < t < t_1$, на котором выполняется второе условие теоремы.

Обе теоремы Лапласа, взятые вместе, означают устойчивость соответствующей задачи многих тел относительно больших полуосей, эксцентриситетов и наклонений орбит (так называемых *позиционных* элементов) и неустойчивость относительно долгот узлов, долготperiцентров и средних долгот в начальную эпоху. А это, если учесть малость эксцентриситетов и наклонений, означает устойчивость задачи по отношению к траекториям или ее *орбитальную устойчивость*. В той мере, в какой обе эти теоремы имеют отношение к нашей реальной Солнечной системе, они означают, что ее нынешнее устройство сохранится и в будущем. Стоит также отметить, что относительно большие значения эксцентриситетов и наклонений орбит Меркурия и Плутона как раз и связаны, по-видимому, с тем, что третье условие теоремы об устойчивости для них выполняется хуже всего. Но главный вопрос состоит в том, чтобы выяснить, насколько велико это будущее, о котором идет речь. Нужно доказать теоремы Лапласа для промежутка времени (t_0, ∞) или опровергнуть их для этого случая.

Важным шагом в решении указанной проблемы стало в 60-х годах XX века создание в аналитической механике *теории КАМ*. Эта теория получила свое название от фамилий ее авторов – А. Н. Колмогорова, его ученика В. И. Арнольда и немецкого математика Ю. Мозера. Для того, чтобы получить представление о теории КАМ, рассмотрим каноническую систему, для наглядности двухмерную, с функцией Гамильтона

$$H(q_i, p_i, \varepsilon) = H_0(q_i, p_i) + \varepsilon H_1(q_i, p_i), \quad i=1,2, \quad (4.66)$$

где H_0 – ее невозмущенная часть, εH_1 – возмущающая, ε – малая величина, а безразмерные невозмущенные координаты q_1, q_2 – периодические функции времени с периодом 2π . Если взять теперь эти координаты в качестве угловых координат в тороидальной системе координат и рассмотреть, как говорят, фазовый портрет невозмущенного движения, то это будет кривая, намотанная на некоторый тор (см. рис. 4.3). Если частоты координат соизмеримы, то эта кривая будет замкнутой, в случае же их несоизмеримости она будет обматывать тор всюду плотно. При наличии возмущения тор начнет деформироваться, и задача состоит в исследовании характера этих деформаций в зависимости от величины параметра ε . В аналитической постановке задача свелась к построению сходящихся рядов, описывающих возмущения координат q_i . Это удалось сделать, применив некоторое обобщение метода итераций Ньютона, которое дает в k -ом приближении ошибку порядка ε^{-2k} , то есть очень быструю сходимость рядов.

Перед тем, как сформулировать основной результат теории КАМ, нужно ввести понятия о почти-периодической и условно-периодической функциях. Функция $f(x)$ является *почти-периодической*, если для любого $\varepsilon > 0$ в любом промежутке $[a, a+l]$ существует такое число τ , что $a < \tau < a+l$,

а $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$. Пусть построен ряд Фурье такой почти-периодической функции

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-i\lambda_k x}. \quad (4.67)$$

Если в спектре λ_k функции $f(x)$ любая частота может быть представлена как линейная функция некоторого набора базисных частот с целочисленными коэффициентами, то-есть

$$\lambda_k = \sum_i^n N_i \lambda_{ni}, \quad (4.68)$$

то функция $f(x)$ называется *условно-периодической*.

Основной результат теории КАМ (*теорема Арнольда*, [3]) состоит в следующем:

Возмущенное движение, описываемое канонической системой типа (4.66), есть условно-периодическое, постоянно близкое к соответствующему невозмущенному движению, почти для всех начальных условий. Выражение “почти для всех” означает в данном случае – “за исключением начальных условий, образующих множество достаточно малой положительной меры”. Это множество образуют резонансные начальные условия и их весьма малые окрестности. Для этих начальных условий (за исключением двухмерных задач) теория КАМ не дает ответа на вопрос об устойчивости невозмущенного движения.

А наблюдаемым нами системам как раз присуща определенная квази-резонансность (см., например, [7]). Для больших планет Солнечной системы удалось найти девять соотношений типа

$$\sum_i k_i n_i \approx 0, \quad (4.69)$$

связывающих средние движения n_i нескольких планет (от трех до пяти), как правило, соседних. При этом коэффициенты k_i – малые целые числа, преимущественно 1 и 2. Такого же типа соотношения найдены и для спутниковых систем планет-гигантов. Вероятность случайного возникновения совокупности таких соотношений крайне мала.

В связи с этим М. Овенден в 1973 г. выдвинул как гипотезу принцип “наименьшего взаимодействия”. Согласно этому принципу спутниковая система большую часть времени близка к такой конфигурации, в которой среднее по времени действие S , обусловленное взаимодействием точек системы, минимально. Эквивалентным является утверждение, что среднее по времени значение возмущающей функции R (1.58) должно быть близким к минимальному. Отсюда вытекает существование квази-резонансных соотношений (4.69). Основой для формулирования этого *принципа Овендена* были результаты численного интегрирования задачи многих тел с различными соотношениями масс точек и разными начальными условиями [36].

С точки зрения теории устойчивости движения принцип Овендена означает, что эволюция системы типа спутниковой или многопланетной задачи многих тел приводит ее именно в квази-резонансное устойчивое состояние, которое обеспечивается минимизацией гравитационных возмущающих сил. Но тут возникает вопрос о возможной дестабилизирующей роли крайне малых относительно диссипативных сил – приливных сил и сил сопротивления среды (оценки плотности последней в Солнечной системе $\approx 10^{-21} \text{ г}/\text{см}^3$). В связи с этим был предложен следующий сценарий небесно-механической эволюции планетных и спутниковых систем [14]. Сначала основную роль играют возмущающие силы гравитационного взаимодействия между телами системы. Эти силы приводят систему в устойчивое квази-резонансное состояние в соответствии с принципом Овендена. В условиях минимизации действия этих возмущающих сил начинают проявлять себя как возмущающие, диссипативные силы, выводящие со временем систему из устойчивого состояния. Но теперь снова возрастает роль консервативных гравитационных сил, которые приводят систему в новое квази-резонансное устойчивое состояние и так далее. Конечно, эти соображения гипотетичны, а каждый этап такой эволюции требует очень много времени.

В то же время безусловно, что при определенных условиях (например, в системе “Солнце – Юпитер – астероид”, в которой существенным образом не выполняется третье условие теоремы Лапласа об устойчивости) квази-резонансное движение является неустойчивым. Об этом свидетельствует существование *люков Кирквуда* – минимумов в распределении астероидов главного пояса по полуосям их орбит, что связано с неустойчивостью орбит со средними движениями, близкими к соизмеримости со средними движениями Юпитера и Сатурна (2:1, 3:2, 5:2 и т. п.).

Наконец, заметим, что несостоительными являются многочисленные попытки “прокантовать” Солнечную систему, то есть найти общее “теоретическое” обоснование известного правила Боде–Тициуса в виде формулы для больших полуосей типа $a_k = a_k(k)$ по аналогии с формулой Ридберга в атомной физике. При этом нередко ссылаются на то, что пространственно-ограниченная система должна иметь дискретный спектр. Но это относится к непрерывным системам. Атом является такой непрерывной системой (вспомним физический смысл волновой функции), а классическая система конечного числа материальных точек – нет. Хотя практически пространственно-ограниченной ее делают гравитационные поля других тел. Для Солнечной системы – это гравитационное поле Галактики.

4.3.3. Устойчивость осевого вращения спутника на круговой орбите. До сих пор мы рассматривали лишь поступательное (орбитальное) движение небесных тел. Но, если рассматривать небесные тела как тела конечных размеров, то задача об их осевом вращении и его взаимосвязи с орбитальным движением лежит в компетенции небесной механики. Рассмотрим теперь задачу об устойчивости осевого вращения спутника, движущегося по круговой орбите радиуса R с угловой скоростью $n = \mu/R^{3/2}$. Нам

понадобится для этого три системы координат – 1) инерциальная X_i (оси X_1 и X_2 расположены в плоскости орбиты); 2) естественная x'_i (ось x'_1 направлена по орбитальному радиусу-вектору центра масс спутника \vec{R} , ось x'_3 перпендикулярна плоскости орбиты; 3) система координат x, y, z совпадающая с главными осями инерции спутника, осевые моменты инерции относительно которых равны A_i . Тогда вектор угловой скорости орбитального движения спутника в системе X_i есть $\vec{n} = (0, 0, n)$, а вектор угловой скорости осевого вращения спутника в этой системе обозначим как $\vec{\omega}$. Матрицу направляющих косинусов осей системы x_i относительно осей системы x'_k обозначим как α_{ik} . Тогда уравнения осевого вращения спутника в инерциальной системе, известные как *уравнения Эйлера*, в индексных обозначениях, которые мы уже начали применять, приимут следующий вид:

$$A_i \frac{d\omega_i}{dt} + (A_j - A_k)\omega_j \omega_k = M_i. \quad (4.70)$$

В записи (4.70) имеется в виду правило циклической перестановки индексов, то есть, например, если $i=2$, то $j=3$, а $k=1$. Силы, создающие вращательный момент M_i , могут иметь, вообще говоря, различную природу. Мы учтем лишь момент гравитационных сил, возникающих потому, что разные элементы массы спутника находятся на чуть-чуть разных расстояниях от центрального тела и поэтому притягиваются им с различной силой. Этот момент равен

$$\vec{M} = \mu \int_{(m)} \frac{\vec{R}' \times \vec{r}}{R'^3} dm, \quad (4.71)$$

где \vec{R}' – радиус-вектор элемента массы dm в системе X_i , а \vec{r} – радиус-вектор того же элемента в системе x_i . Но $r \ll R$, и поэтому

$$R' = \sqrt{R^2 + 2\vec{R}\vec{r} + r^2} \cong \sqrt{R^2 + 2\vec{R}\vec{r}} \cong R \left(1 + \frac{\vec{R}\vec{r}}{R^2} \right). \quad (4.72)$$

Подставляя (4.72) в (4.71), получим, что

$$\vec{M} = \frac{\mu}{R^5} \int_{(m)} (\vec{R} \times \vec{r}) \cdot (\vec{R} \cdot \vec{r}) dm. \quad (4.73)$$

Расписывая (4.73) по координатам в системе x_i векторное и скалярное произведение векторов \vec{R} и \vec{r} , получим окончательно, что

$$M_i = -3n^2(A_j - A_k)\alpha_{ij}\alpha_{ik}. \quad (4.74)$$

Теперь видно, что систему (4.70) нельзя решать без системы уравнений, описывающей изменения во времени элементов матрицы α_{ik} . Если ввести орты \vec{e}_i осей x_i , то линейная скорость концов этих ортов равняется $\dot{\vec{e}}_i = (\vec{\omega} - \vec{n}) \times \vec{e}_i$. В координатной форме это даст:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_{i1}}{dt} &= \omega_2\alpha_{i3} - \omega_3\alpha_{i2} + n\alpha_{i2}, \\
\frac{d\alpha_{i2}}{dt} &= \omega_3\alpha_{i1} - \omega_1\alpha_{i3} - n\alpha_{i1}, \\
\frac{d\alpha_{i3}}{dt} &= \omega_1\alpha_{i2} - \omega_2\alpha_{i1}.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Система уравнений (4.70) и (4.75) нелинейная и не интегрируется в конечном виде. Однако она имеет первый интеграл типа интеграла энергии:

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} A_i \omega_i^2 + \frac{3}{2} n^2 A_i \alpha_{ii} - n A_i \omega_i \alpha_{i2} \right) = h. \tag{4.76}$$

Для того, чтобы убедиться в этом, нужно найти полную производную от (4.76) по времени и подставить значения производных ω_i и α_{ik} из (4.70) и (4.75). Чтобы узнать, как выглядит спутник с центрального тела, перейдем в интеграле (4.76) к относительной угловой скорости $\vec{\omega}' = \vec{\omega} - \vec{n}$. Тогда этот интеграл приобретет такой вид:

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} A_i \omega_i'^2 + \frac{3}{2} n^2 A_i \alpha_{ii}^2 - \frac{1}{2} n^2 A_i \alpha_{i2}^2 \right) = h. \tag{4.77}$$

Наконец, исключим из (4.77) величины α_{11}^2 и α_{22}^2 с помощью соотношений ортонормированности, которым удовлетворяют направляющие косинусы. Получим такой первый интеграл:

$$\sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} A_i \omega_i' + \frac{3}{2} n^2 ((A_2 - A_1)\alpha_{21}^2 + (A_3 - A_1)\alpha_{31}^2) + \frac{1}{2} n^2 ((A_3 - A_2)\alpha_{32}^2 + (A_3 - A_1)\alpha_{21}^2) \right] = h_0, \tag{4.78}$$

где h_0 – новая постоянная. Левую часть первого интеграла (4.78) можно использовать как функцию Ляпунова V для исследования поведения возмущенного вращательного движения в окрестности состояния синхронного осевого вращения спутника. Тогда в невозмущенном движении $\vec{\omega}' = 0, \vec{\omega} = \vec{n}, \alpha_{ik} = \delta_{ik}$ и $V = 0$. Производная от левой части (4.78) равна нулю, ибо это первый интеграл. А при условии

$$A_3 > A_2 > A_1 \tag{4.79}$$

функция V будет знакоопределенной при малых отклонениях от состояния синхронного вращения, другими словами, это состояние согласно основной теореме Ляпунова будет устойчивым. А само условие (4.79) означает, что спутник должен быть ориентирован таким образом, чтобы он был наиболее сплюснут в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты, а наиболее вытянутым в направлении на центральное тело. Именно так ориентирована Луна, у которой экваториальный диаметр, направленный на Землю, на 3 км больше чем диаметр, касательный к орбите, а перпендикулярный к ним диаметр еще меньше. На полученном результате основан и используемый в космонавтике принцип *гравитационной стабилизации* искусственных спутников Земли.

Если наложить дополнительное условие, что осевое вращение происходит вокруг оси, перпендикулярной к орбите, то задача упрощается, в (4.70) остается только одно уравнение, которое оказывается подобным

уравнению движения математического маятника и может быть проинтегрировано – зависимость $t = t(\varphi)$, где φ – угол поворота спутника вокруг оси, дается эллиптическим интегралом. Можно в этом случае определить и пределы отклонения спутника от состояния синхронного вращения при заданной разности осевых моментов инерции, при которых сохраняется устойчивость (или, как говорят, имеет место *либрационный режим вращения*), а при выходе отклонений за эти пределы вращение спутника станет неустойчивым (он переходит в *ротационный режим вращения*, см. об этом подробнее в [2, 5]).

Задачи к главе IV

- 4.1. Выразить компоненты возмущающего ускорения S и T через компоненты F_τ , касательной к орбите, и F_n , направленную по нормали к орбите в ее плоскости.
- 4.2. При значениях $e \rightarrow 0$ элемент ω становится неопределенным. Чтобы избавиться от связанных с этим трудностей, вводят элементы $p = e \sin \omega, q = e \cos \omega$. Найти дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов p и q .
- 4.3. При значениях $i \rightarrow 0$ становится неопределенной долгота узла Ω . Чтобы избавиться от возникающих в связи с этим сложностей, вводят элементы $l = t g i \sin \Omega$ и $m = t g i \cos \Omega$. Найти дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов l и m в эллиптической системе элементов.
- 4.4. Составить дифференциальные уравнения для истинной аномалии v и расстояний в periцентре r_π и apoцентре r_a в компонентах S и T .
- 4.5. Около звезды, интенсивно теряющей массу вследствие корпускулярного излучения, движется планета. Доказать, что при этом плоскость движения не изменяет своего положения в пространстве. Найти возмущения других элементов, если орбита планеты почти круговая.
- 4.6. Пусть возмущающее ускорение спутника от сопротивления атмосферы $\vec{F} = -kr^{-2}\vec{V}\vec{V}$. Доказать, что скорость изменения оскулирующей большой полуоси орбиты

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2k}{\mu(1-e^2)} \left(\frac{p}{r}\right)^2 V^3.$$

- 4.7. Доказать, что возмущенное эллиптическое движение устойчиво, если при возмущении начальных условий сохраняется значение постоянной интеграла момента c .
- 4.8. Доказать, что круговые экваториальные орбиты звезд на периферии эллиптической однородной галактики устойчивы, если их эксцентриситет превышает значение $e = 0.834$.
- 4.9. Планета с моментами инерции $A < B < C$ вращается вокруг оси с наибольшим моментом инерции с угловой скоростью ω . Показать, что вершины экваториального эллипса являются точками относительного

равновесия в системе координат, вращающейся вместе с планетой, и исследовать их устойчивость в первом приближении.

4.10. Найти необходимые и достаточные условия устойчивости нулевого решения приближенных уравнений для оскулирующих элементов l и m задачи 4.3:

$$\frac{dl}{dt} = -m[b - c(l^2 + m^2)]$$

$$\frac{dm}{dt} = l[b - c(l^2 + m^2)]$$

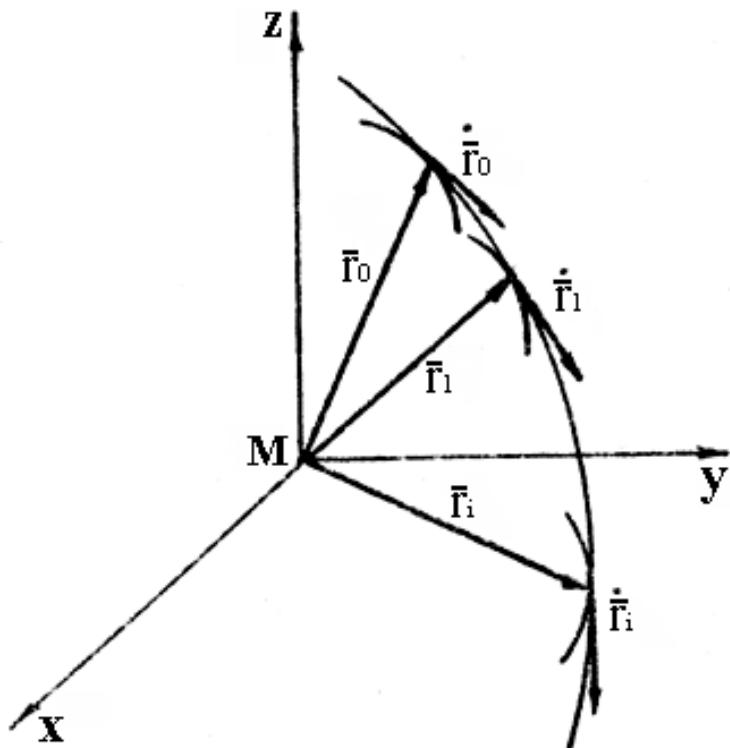


Рис.4.1. Возмущённая и оскулирующая орбиты

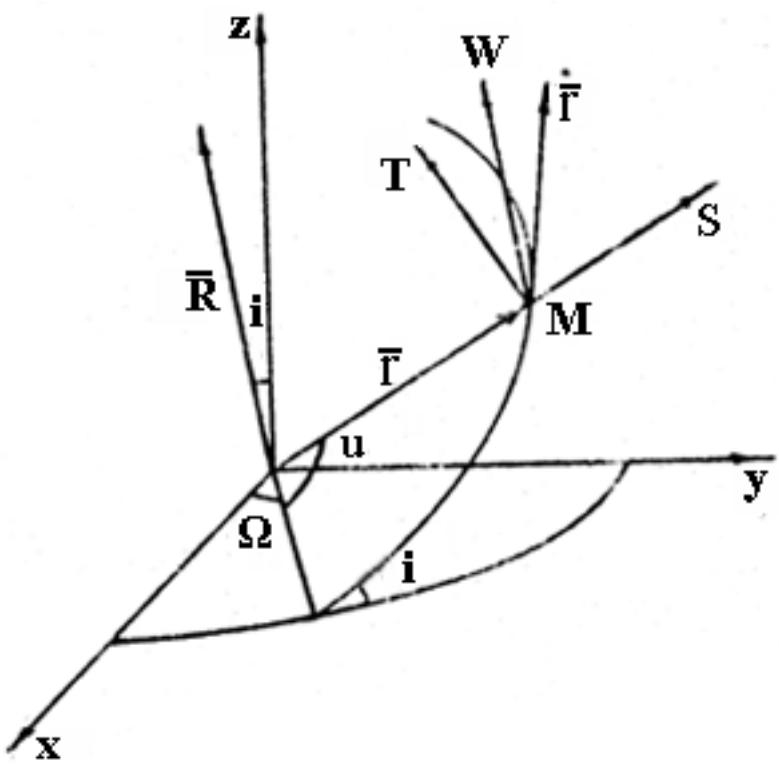


Рис. 4.2. Естественная система координат

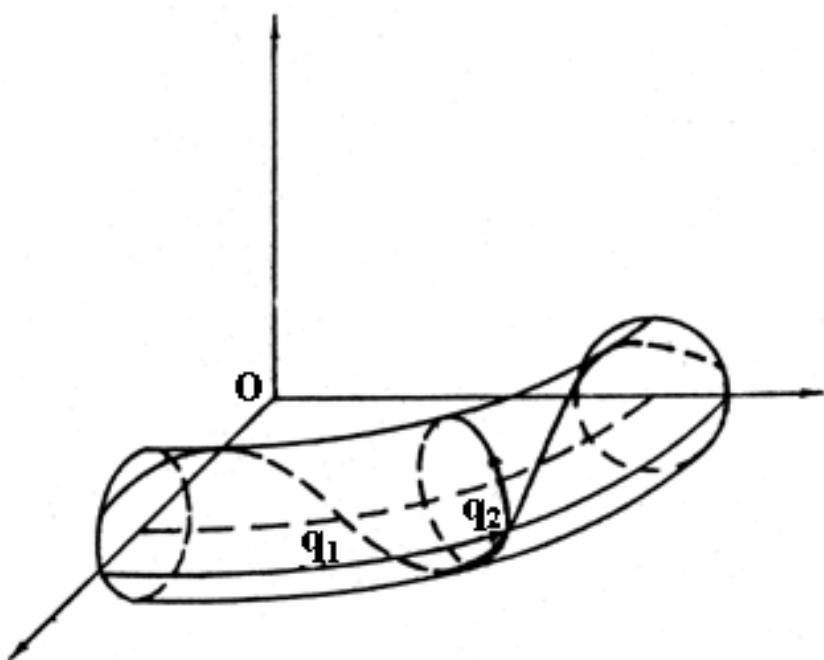


Рис. 4.3. Изображение двухмерного периодического движения в тороидальной системе координат

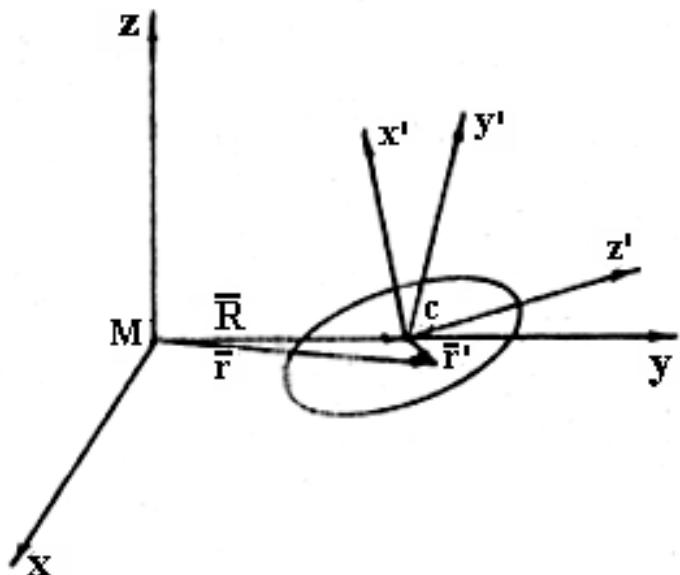


Рис.4.4. Системы координат для описания орбитального и вращательного движения спутника

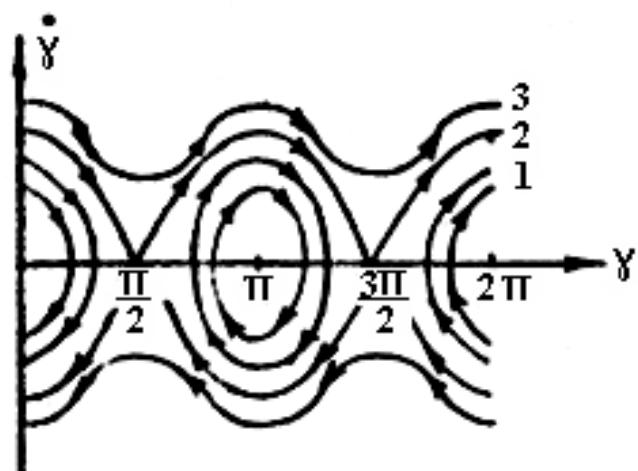


Рис. 4.5. Изображение вращательного движения спутника около резонансного значения угловой скорости ω в фазовой плоскости $\dot{\gamma} - \dot{\gamma}$

Глава V. ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА

Будем понимать под спутником любое небесное тело, которое как материальная точка обращается вокруг другого (центрального) тела, рассматриваемого в невозмущенном движении также как материальная точка. То есть, невозмущенное движение спутника – это эллиптическое кеплеровское движение. В качестве возмущающих рассмотрим следующие факторы:

- 1) влияние отклонения гравитационного поля центрального тела от поля материальной точки (от центрального ньютоновского поля);
- 2) влияние какого-либо третьего небесного тела, которое также будем считать материальной точкой;
- 3) влияние сопротивления среды, в которой происходит движение спутника.

В первом случае имеется в виду прежде всего движение естественного или искусственного спутника сжатой планеты. Это может также быть движение планеты вокруг звезды раннего спектрального класса, ощутимо сжатой вследствие большой скорости ее осевого вращения. Во втором случае это возмущение движения одной планеты другой или движения одного естественного спутника планеты другим, или движения искусственного спутника планеты естественным и, наконец, возмущение движения спутника планеты Солнцем. Также это может быть возмущение движения одного из компонентов тройной звездной системы относительно другого под влиянием третьего компонента, ибо, как правило, устойчивая конфигурация тройной системы такова, что третий компонент системы значительно удален от первых двух. Третий фактор – это, прежде всего, движение искусственного спутника планеты, возмущенное сопротивлением атмосферы этой планеты. В последнее время стала актуальной и следующая задача. Уже найдено более ста планет близи других звезд – экзопланет. Однако техника наблюдений позволяет обнаруживать лишь планеты с массами порядка массы Юпитера на расстояниях от центральной звезды порядка 1 а.о. и меньше. А по существующим представлениям об образовании планетных систем такие планеты на таких расстояниях образовываться не могут. Поэтому возникла идея, что эти планеты образуются на больших расстояниях, при этом относительно быстро. Потом их движение происходит в еще достаточно плотных остатках протопланетного облака и ощутимо тормозится ими, за счет чего планеты переходят на орбиты, значительно более близкие к звезде.

Рассмотрение указанных выше трех задач позволит продемонстрировать на практике применение метода оскулирующих орбит и метода осреднения, изложенных в предыдущей главе. Будет ставиться задача получения и исследования эволюционных уравнений возмущенного движения.

5.1. Влияние сжатия центрального тела на движение спутника

5.1.1. Возмущенное движение спутника в первом приближении. По самой постановке этой задачи гравитационное поле центрального тела отличается от поля материальной точки, и его потенциал есть

$$V = \frac{\mu}{r} + R, \quad (5.1)$$

где R – возмущающий потенциал. С физической точки зрения это различие есть следствие того, что центробежная сила при осевом вращении растягивает тело вдоль его экватора (хотя обычно говорят о полярном сжатии). Теория фигур небесных тел (см. [2, 40]) связывает в первом приближении малые параметры – геометрическое сжатие тела ε , коэффициент второй зональной гармоники его гравитационного потенциала J_2 и *параметр вращения*

$$q = \frac{\omega^2 a}{\mu}, \quad (5.2)$$

который равен отношению центробежной силы к гравитационной на экваторе тела. При этом

$$J_2 = -\frac{2\varepsilon - q}{3}. \quad (5.3)$$

Оценки по формуле (5.3) показывают, что для планет Солнечной системы величина J_2 по модулю примерно $10^{-2} \div 10^{-3}$ (см. табл. 1.1). Это позволяет исследовать влияние сжатия планет на движение их спутников методом оскулирующих элементов, а более или менее пригодным приближением для их гравитационного потенциала может быть, как уже указывалось, формула (1.19), то есть

$$R = \mu J_2 \frac{3\cos^2 \theta - 1}{2} \frac{a^2}{r^3}, \quad (5.4)$$

где, напомним, μ – гравитационный параметр центрального тела, a – его экваториальный радиус, θ – полярное расстояние точки, в которой ищется потенциал. Кроме того, вводя (5.4), мы тем самым выбрали систему координат, связанную с экваториальной плоскостью центрального тела.

Согласно с общей схемой подраздела 4.2.3 для получения эволюционных уравнений возмущенного движения нужно прежде всего осреднить возмущающий потенциал на периоде обращения, иными словами, вычислить интеграл (см. (4.47)):

$$\bar{R} = \frac{1}{4\pi} n a^2 J_2 \sqrt{\frac{\mu}{p}} \int_0^{2\pi} (3\cos^2 \theta - 1) \frac{dv}{r}. \quad (5.5)$$

Если подставить значение r из уравнения орбиты (4.3) и найти $\cos\theta$ как синус широты из соответствующего сферического треугольника, то будем иметь:

$$\bar{R} = \frac{1}{4\pi} \frac{n a^2 J_2 \sqrt{\mu}}{p^{3/2}} \int_0^{2\pi} [3\sin^2(\omega + v)\sin^2 i - 1] (1 + e \cos v) dv. \quad (5.6)$$

Интегрирование (5.6) дает:

$$\bar{R} = \frac{n a^2 J_2 \sqrt{\mu}}{4 p^{3/2}} (1 - 3 \cos^2 i). \quad (5.7)$$

Осредненный потенциал (5.7) зависит лишь от элементов i и p . Подставляя его производные по элементам в уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов (4.15), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{i}}{dt} &= 0, \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{e}}{dt} = 0, \\ \frac{d\bar{\Omega}}{dt} &= \frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{a}{p} \right)^2 \cos i, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{a}{p} \right)^2 (1 - 5 \cos^2 i). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Таким образом, элементы i, p, e не имеют вековых возмущений – наклонение орбиты, ее форма и размер в среднем не изменяются. Последние два уравнения показывают, что вековые возмущения движения под действием второй зональной гармоники потенциала сводятся к *прецессии линии узлов* (или, что то же самое, к прецессии нормали к плоскости орбиты около полярной оси центрального тела) и *прецессии линии апсид* в плоскости орбиты. Скорость прецессии линии узлов равна нулю для полярной орбиты и увеличивается с уменьшением наклонения орбиты и происходит в направлении, противоположном движению спутника по орбите (ибо $J_2 < 0$). Скорость прецессии линии апсид обращается в нуль при $\cos i = 1/\sqrt{5}$, то есть при $i \approx 63.5^\circ$, при этом изменяется ее направление на противоположное. Подсчеты показывают, что для низких ($p \approx a$) искусственных спутников Земли с наклонением орбиты около 60° период прецессии линии узлов приблизительно три месяца, ибо ее скорость – около 4° в сутки.

Сделаем еще такое замечание. Если речь идет о движении «маленького» искусственного спутника вокруг «огромной» Земли, то мы говорим о прецессии нормали к плоскости орбиты спутника вокруг оси вращения Земли. А в случае движения «маленькой» Земли вокруг «огромного» Солнца – о прецессии оси вращения Земли около нормали к плоскости ее орбиты. А тем не менее речь идет об одном и том же физическом явлении – гравитационном взаимодействии между сжатым телом и материальной точкой в их относительном движении. Это интересное и нетривиальное проявление принципа относительности движения.

Отметим также то, что рассматриваемая задача является частным случаем следующей задачи – определение движения материальной точки вследствие ее взаимодействия с телом конечных размеров. Эта задача получила в небесной механике название *задачи Фату* (по имени французского астронома П. Фату).

Хотя величина коэффициента J_2 для Земли мала ($|J_2| \approx 10^{-3}$), все же для вычисления координат ИСЗ с нужной точностью приближения (5.8)

недостаточно. Тем более это так для спутников значительно больше сжатых Юпитера или Сатурна. И тут полезной оказалась еще одна задача, об интегрируемости уравнений которой уже давно было известно.

5.1.2. Задача двух неподвижных центров и ее применение. Задача эта формулируется следующим образом. Есть две материальные точки m_1 и m_2 , неподвижные в инерциальной системе координат. Нужно исследовать движение материальной точки m в совместном поле тяготения этих неподвижных точек. С физической точки зрения эта задача некорректна. Если точки m_1, m_2 притягивают точку m , то почему они не притягивают одна другую и не притягиваются точкой m , а если притягиваются, то как они могут быть неподвижными. Однако интегрируемость задачи и связанные с этим возможности ее применения делают рассмотрение этой задачи целесообразным. Уравнение задачи двух неподвижных центров таково:

$$\ddot{\vec{r}} + \mu_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} = 0. \quad (5.9)$$

Если поместить начало координат в центре масс неподвижных точек, а ось z направить по прямой, соединяющей эти точки, то (см. рис. 5.3)

$$r_{1,2} = \sqrt{r^2 - 2rc_{1,2} \cos\gamma + c_{1,2}^2}, \quad (5.10)$$

где $c_{1,2}$ – аппликаты точек m_1, m_2 соответственно.

Теперь силовая функция задачи двух неподвижных центров может быть записана в таком виде (см. (1.2) и (1.3)):

$$V_{12} = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{r} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\cos\gamma) \frac{\gamma_k}{r^k} \right], \quad (5.11)$$

где коэффициенты

$$\gamma_k = \frac{m_1 c_1^k + m_2 c_2^k}{m_1 + m_2}. \quad (5.12)$$

Иначе говоря, функция V_{12} – это потенциал гравитационного диполя, который задается четырьмя параметрами $m_{1,2}$ и $c_{1,2}$. Сравнивая ряды для потенциалов осесимметричного тела (1.16) и для гравитационного диполя (5.11), можно поставить такую задачу – найти параметры гравитационного диполя из условия, чтобы первые четыре гармоники обоих потенциалов совпадали. Это даст такую систему уравнений для параметров диполя:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= M, \\ m_1 c_1 + m_2 c_2 &= 0, \\ m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 &= J_2 Ma^2, \\ m_1 c_1^3 + m_2 c_2^3 &= J_3 Ma^3, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где M и a – масса и экваториальный радиус тела, а J_2, J_3 – коэффициенты второй и третьей гармоник его гравитационного потенциала. Из первых двух уравнений получаем, что

$$m_1 = -\frac{Mc_2}{c_1 - c_2}, \quad m_2 = \frac{Mc_1}{c_1 - c_2} \quad (5.14)$$

(напомним, что по выбору системы координат (рис. 5.3) значение $c_2 < 0$). А подставляя (5.14) в последние два уравнения (5.13), увидим, что

$$c_1 c_2 = -J_2 a^2, \quad c_1 c_2 (c_1 + c_2) = -J_3 a^3 \quad (5.15)$$

или

$$c_1 c_2 = -J_2 a^2, \quad c_1 + c_2 = \frac{J_3}{J_2} a.$$

Теперь по теореме Виета

$$c_{1,2} = \left(\frac{J_3}{J_2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_3}{J_2} \right)^2 + 4J_2} \right) \frac{a}{2}. \quad (5.16)$$

Если же тело симметрично относительно экватора, то $J_3 = 0$ и

$$c_{1,2} = \pm \sqrt{J_2} a. \quad (5.17)$$

Уравнения задачи двух неподвижных центров интегрируются в конечном виде в специальной эллиптической системе координат (как это установил еще Л. Эйлер). Поэтому, если вычислить параметры гравитационного диполя по формулам (5.14) и (5.16) или (5.17), то будем иметь точное решение задачи о движении спутника в поле центрального тела с учетом второй и третьей гармоник его потенциала. И все было бы хорошо, если бы не то, что это тело сжатое, а не вытянутое, и поэтому $J_2 < 0$, а поскольку сжатие относительно невелико, то $|J_3| \ll |J_2|$. Вследствие этого значения координат неподвижных точек комплексные в случае (5.16) и чисто мнимые – в случае (5.17). Это обстоятельство длительное время мешало применению задачи двух неподвижных центров к описанию движения спутника сжатой планеты. Происходило это, по-видимому, в силу двух причин. Во-первых, влияло определенное психологическое недоверие к мнимым величинам, к тому, что они могут описывать реальные физические процессы. Во-вторых, задача о влиянии сжатия планеты на движение ее естественного спутника не такая уж актуальная по сравнению с задачей об этом влиянии на движение ее искусственного спутника. Ибо более или менее большой естественный спутник не может двигаться по орбите, размер которой меньше предела Роша, иначе он будет разорван приливными силами. А влияние сжатия планеты возрастает обратно пропорционально отношению квадрата радиуса орбиты к радиусу планеты (см. (5.8)). Но эта задача стала крайне актуальной с возникновением практической космонавтики, ибо большинство ИСЗ выводятся на низкие орбиты с высотой полета, малой в сравнении с радиусом Земли. И задача двух неподвижных центров с успехом была применена к описанию влияния сжатия Земли на движение ИСЗ. Тем более, что методом оскулирующих элементов можно приближенно учесть и влияние четвертой гармоники гравитационного потенциала планеты. Добавим, что в случае вещественных значений координат $c_{1,2}$ рассматриваемая задача называется *классической задачей двух неподвижных*

центров, а тогда, когда значения $c_{1,2}$ комплексные или мнимые, это *обобщенная задача двух неподвижных центров*.

Эта историко-гносеологическая ситуация выразительно показывает важнейшую роль потребностей практики в развитии науки. «Если у общества появляется техническая потребность, то она движет науку быстрее, нежели десяток университетов» – писал Ф. Энгельс в “Диалектике природы”. В то же время нужно подчеркнуть, что именно университеты являются одной из наиболее удачных организационных форм развития науки. И исследования, связанные с применением задачи двух неподвижных центров к описанию возмущенного движения ИСЗ, были выполнены как раз в университете, Это было сделано в Московском университете учениками Г. Н. Дубошина Е. П. Аксеновым, Е. А. Гребенниковым и В. Г. Деминым [15].

Приведем теперь формулы, связывающие декартовые и эллиптические координаты λ, μ, w в случае тела, симметричного относительно экватора:

$$\begin{aligned} x &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} \cos w, \\ y &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} \sin w, \\ z &= c\lambda\mu, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где $c = |c_{1,2}|$.

Решение задачи двух неподвижных центров имеет следующий вид [15, 18]:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\lambda}{\sqrt{2(1+\lambda^2)(\alpha_1 c^2 \lambda^2 + (\mu_1 + \mu_2)c\lambda + \alpha_2) + \alpha_3^2}} &= \tau + \beta_1, \\ \int \frac{d\mu}{\sqrt{2(1-\mu^2)(\alpha_1 c^2 \mu^2 - \alpha_2) - \alpha_3}} &= \tau + \beta_2, \\ w &= \alpha_3 \int \frac{\lambda^2 + \mu^2}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} d\tau + \beta_3, \\ t &= c^2 \int (\lambda^2 + \mu^2) d\tau, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где α_i, β_i – постоянные интегрирования методом Гамильтона – Якоби. Первые два интеграла (5.19) сводятся к эллиптическим интегралам, а явный вид решения (зависимость координат λ, μ от переменной τ) может быть найден с помощью эллиптических функций Якоби, которые являются функциями, обратными неполным эллиптическим интегралам.

Укажем, наконец, что значения параметра гравитационного диполя c для Земли равно 209 км, для Марса – 150 км, для Юпитера – 8462 км, для Сатурна – 7547 км.

5.2. Влияние третьего тела на движение спутника

Для определенности задачи нужно задать движение возмущающего тела с массой m_1 относительно центрального тела с массой M , которые оба считаются материальными точками. Пусть это будет круговое движение по

орбите с радиусом r_1 и угловой скоростью n_1 . Возьмем плоскость этого движения за основную плоскость системы координат.

5.2.1. Возмущающий потенциал и его осреднение. Уравнение возмущенного движения имеет следующий вид (рис. 5.4):

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \mu_1 \left(-\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} \right), \quad (5.20)$$

где первое слагаемое справа – это ускорение с противоположным знаком, сообщаемое возмущающим телом началу координат – центральному телу, а второе – это ускорение, которое сообщается возмущающим телом спутнику. При этом модуль всей правой части уравнения (5.20) значительно меньше, нежели ускорение спутника от центрального тела μ/r^2 . Это может быть как за счет малости массы возмущающего тела (планета и два ее спутника), так и за счет его удаленности (планета – спутник – Солнце). В соответствии с видом правой части (5.20) возмущающий потенциал равен

$$R = \mu_1 \left(-\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}}{r_1^3} + \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|} \right). \quad (5.21)$$

Первое слагаемое в (5.21) записано, с учетом того, что радиус-вектор \vec{r}_1 не зависит от координат спутника. Расстояние между спутником и возмущающим телом

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}| = \sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos\psi + r_1^2}. \quad (5.22)$$

Будем считать, что $r \ll r_1$. Это вполне возможно, если возмущающее тело – естественный спутник планеты (вспомним о пределе Роша), и безусловно так, если движение спутника возмущается Солнцем.

Разложим обратное расстояние между спутником и возмущающим телом в ряд по степеням отношения r/r_1 и удержим лишь три первых члена этого ряда. Тогда возмущающий потенциал

$$R = \frac{\mu_1 r^2}{2r_1^3} (3\cos^2\psi - 1), \quad (5.23)$$

при этом мы отбросили постоянную μ_1/r_1 . Из сферического треугольника $m\Omega m_1$ (рис. 5.4) следует, что

$$\cos\psi = \cos i \cos(v_1 - \Omega) + \sin i \sin(v_1 - \Omega) \cos i. \quad (5.24)$$

Теперь нужно осреднить возмущающий потенциал (5.23). В данном случае он зависит от двух “быстрых” переменных – истинной аномалии спутника v и истинной аномалии возмущающего тела v_1 . Если периоды оборотов спутника и возмущающего тела несизмеримы, то можно последовательно осреднить потенциал по каждой из этих переменных. Начнем с переменной $v_1 = n_1 t$. Вычисляя интеграл

$$\bar{R} = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} R(v_1(t)) dt, \quad (5.25)$$

где период $T_1 = 2\pi/n_1$, получим:

$$\bar{R} = \frac{\mu_1 r^2}{4r_1^3} (1 - 3\sin^2 u \sin^2 i). \quad (5.26)$$

После исключения радиуса r с помощью уравнения орбиты интеграл осреднения по истинной аномалии спутника v будет иметь согласно (4.47) такой вид:

$$\bar{\bar{R}} = \frac{1}{2\pi} \frac{n\mu_1 p}{4r_1^3 \sqrt{\mu p}} \int_0^{2\pi} \frac{1 - 3\sin^2 i \sin^2(\omega + v) dv}{(1 + e \cos v)^4}. \quad (5.27)$$

Этот интеграл также находится в конечном виде, хотя бы универсальной заменой $x = \operatorname{tg}(v/2)$ и последующим интегрированием рациональной дроби. Окончательный результат такого интегрирования следующий:

$$\bar{\bar{R}} = \frac{3}{8} \frac{\mu_1 a^2}{r_1^3} [(1 - e^2) \cos^2 i + e^2 (2 - 5 \sin^2 \omega \sin^2 i)], \quad (5.28)$$

где a – большая полуось оскулирующей орбиты спутника.

5.2.2. Эволюционные уравнения и их первые интегралы. Теперь нужно записать систему эволюционных уравнений нашей задачи. Это удобнее сделать, если перейти от кеплеровских элементов оскулирующей орбиты к системе канонических элементов, называемой системой элементов Делоне (по имени французского астронома XIX века.). Эти элементы связаны с кеплеровскими таким образом:

$$L = \sqrt{\mu a}, \quad G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \quad H = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i, \quad l = \pi + M, \quad g = \omega, \quad h = \Omega. \quad (5.29)$$

Дважды осредненный возмущающий потенциал в элементах Делоне, если подставить (5.29) в (5.28), будет иметь следующий вид:

$$\bar{\bar{R}} = \frac{3}{8} \frac{\mu_1}{r_1^3} \frac{L^4}{\mu^2} \left[\frac{H^2}{L^2} + \frac{L^2 - G^2}{L^2} \left(2 - 5 \frac{G^2 - H^2}{G^2} \sin^2 g \right) \right]. \quad (5.30)$$

Для того, чтобы записать канонические уравнения возмущенного движения, нужно найти его функцию Гамильтона, равную $H = H_0 + H_1$, где гамильтониан невозмущенного движения H_0 совпадает с его полной энергией $-\mu/a$, а возмущение гамильтониана H_1 – это возмущающая функция $\bar{\bar{R}}$ с противоположным знаком. То есть

$$H = -\left[\frac{\mu^2}{2L^2} + \bar{\bar{R}}(L, G, H, g) \right]. \quad (5.31)$$

Поскольку функция Гамильтона (5.31) не зависит от переменных l и h , то существуют первые интегралы $L = L_0$ и $H = H_0$. Первым интегралом является и сама функция Гамильтона, ибо она не зависит явно от времени t , то есть $H = \text{const}$. Возвращаясь к кеплеровским элементам, будем иметь, что

$$a = a_0, \quad (1 - e^2) \cos^2 i = c_1. \quad (5.32)$$

Но из существования найденных первых интегралов вытекает, что и второе слагаемое в выражении для возмущающего потенциала постоянная величина, то есть

$$e^2(2 - 5 \sin^2 \omega \sin^2 i) = c_2. \quad (5.33)$$

Напомним, что, хотя мы не подчеркивали этого обозначениями, речь идет об осредненных значениях оскулирующих элементов, об их вековых частях. Поэтому ясно, что первый интеграл $a = a_0$ является проявлением теоремы Лапласа об отсутствии вековых возмущений больших полуосей.

Рассмотрим поведение возмущенного движения в фазовой плоскости $x = \cos^2 i$ и $y = 1 - e^2$. Изображающая точка в силу (5.32) будет двигаться вдоль равнобочной гиперболы $xy = c_1$, а точнее говоря, вдоль ее части в пределах единичного квадрата (рис. 5.5). Рассмотрим два таких предельных случая: 1) $c_1 \geq 1, e \ll 1, i \ll \pi/2$ и 2) $c_1 \ll 1$. Первый случай будет иметь место тогда, когда начальные значения эксцентриситета e_0 и наклонения орбиты i_0 будут достаточно малыми. А в силу первого равенства (5.32) в этом случае значения e и i также будут малыми, по крайней мере на некотором отрезке времени, чего и следует ожидать на основе теоремы Лапласа об устойчивости Солнечной системы, условия которой выполняются. В втором случае выделим два граничных положения изображающей точки: а) $e \ll 1, i \geq \pi/2$ и б) $e \geq 1, i \ll \pi/2$. Положение а) соответствует орбите спутника почти круговой и почти перпендикулярной к плоскости движения возмущающего тела. В положении б) имеем мало наклоненную, но сильно вытянутую орбиту спутника. При достаточном большом времени возмущенного движения изображающая точка будет переходить из положения а) в положение б) и наоборот. То есть в случае 2) по отношению к форме орбиты и ее наклону к основной координатной плоскости возмущенное движение будет неустойчивым (это будет при начальном условии $(1 - e_0^2) \cos^2 i_0 \ll 1$). При этом оно будет весьма неустойчивым в том смысле, что эволюция орбиты из одного граничного состояния в другое будет происходить достаточно быстро. Так, вычисления дали следующий результат. Если “перевести” Луну на орбиту с ее нынешним эксцентриситетом, но наклоненную к эклиптике на угол, дополняющий ее нынешнее наклонение до 90° , то наклонение начнет быстро уменьшаться, а эксцентриситет орбиты увеличиваться. И всего через 4.5 года расстояние Луны в перигее станет равным радиусу Земли, то есть Луна “свалится” на Землю (ибо нужно помнить, что при этом большая полуось орбиты будет сохранять свое среднее значение, и расстояние в перигее будет уменьшаться в соответствии с увеличением эксцентриситета).

Если в интеграле (5.33) исключить значение e с помощью второго из соотношений (5.32), то можно исследовать поведение возмущенного движения в фазовой плоскости $x = \cos^2 i$ и $z = \sin^2 \omega$. Будем иметь, что

$$z = \frac{(2 - c_2)x - 2c_1}{5(x - c_1)(1 - x)}. \quad (5.34)$$

Исследование дробно-рациональной функции (5.34) показывает, что возможны два типа ее поведения: а) функция не имеет экстремумов в пределах единичного квадрата и пересекает его нижнюю и верхнюю

стороны; б) функция имеет минимум и дважды пересекает верхнюю сторону единичного квадрата. В случае а) $\sin^2 \omega$ пробегает значения от 0 до 1, иperiцентровое расстояние монотонно возрастает – имеет место *прецессия линии апсид*, а наклонение орбиты периодически изменяется в некоторых пределах от i_1 до i_2 . В случае б) periцентровое расстояние может изменяться лишь в определенных пределах – $90^\circ - \Delta\omega_1 \leq \omega \leq 90^\circ + \Delta\omega_2$ или $270^\circ - \Delta\omega_1 \leq \omega \leq 270^\circ + \Delta\omega_2$. То есть, имеет место *либрация линии апсид* при покачивании плоскости орбиты в пределах от i_1 до i_2 . При соответствующих начальных условиях может реализовываться интересная граничная ситуация, когда на верхнюю сторону единичного квадрата попадает лишь вершина кривой $z = z(x)$. Линия апсид будет занимать при этом устойчивое в среднем положение, перпендикулярное к линии узлов при фиксированном в среднем наклонении орбиты к плоскости орбиты возмущающего тела, а в силу (5.31) фиксированным будет и среднее значение эксцентриситета ($\omega = 90^\circ, i = i_0, e = e_0$). Вычисления показывают, что это будет при $i_0 \approx 48^\circ, e_0 \approx 0.51$.

Полное решение эволюционных уравнений можно получить, если записать эти уравнения для осредненных оскулирующих элементов Делоне G, g, h . После вычисления производных от функции Гамильтона (5.31) по элементам g, G, H получим такую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= -\frac{15}{8} \frac{\mu_1}{r_1^3} \frac{L_0^2}{\mu^2} \frac{(L_0^2 - G^2)(G^2 - H^2)}{G^2} \sin 2g, \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{3}{4} \frac{\mu_1}{r_1^3} \frac{L_0^2}{\mu^2} G \left(2 - 5 \frac{G^4 - L_0^2 H_0^2}{G^4} \sin^2 g \right), \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{3}{4} \frac{\mu_1}{r_1^3} \frac{L_0^2}{\mu^2} H_0 \left(1 + 5 \frac{G^2 - L_0^2}{L_0^2} \sin^2 g \right), \end{aligned} \quad (5.35)$$

которая интегрируется в эллиптических интегралах.

И снова мы сталкиваемся с ситуацией, когда некоторый результат (неустойчивость возмущенного движения в случае 2) мог бы быть получен уже давно в классической небесной механике, однако был найден лишь с развитием астродинамики в середине 50-х годов XX века. В данном случае это связано с характером самого этого результата – он означает сильную неустойчивость систем определенной конфигурации и поэтому в природе не встречается. А человек, начав освоение космического пространства, может создавать такие системы. Хотя тут можно возразить, приведя пример системы спутников Урана. Наклонение плоскости его экватора к плоскости его орбиты несколько превышает 90° , а наклонения орбит спутников Урана к плоскости его экватора очень малы. То есть эти спутники находятся в неустойчивом состоянии по отношению к возмущающему действию Солнца. Однако тут дело в том, что на эти спутники действуют одновременно и притяжение Солнца, и нецентральность гравитационного поля сравнительно сильно сжатого Урана. И стабилизирующее влияние сжатия Урана значительно больше, нежели действие далекого Солнца.

5.3. Влияние сопротивления атмосферы на движение искусственного спутника планеты

5.3.1. Сила сопротивления атмосферы. При больших скоростях сила сопротивления среды пропорциональна плотности этой среды и квадрату скорости движения, она направлена в сторону, противоположную вектору скорости. Ускорение силы сопротивления записывают обычно таким образом:

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \frac{c_x}{m} \rho S_x V \vec{V}, \quad (5.36)$$

где c_x – коэффициент сопротивления, m – масса спутника, S_x – площадь сечения спутника, перпендикулярного вектору скорости \vec{V} , ρ – плотность атмосферы. Далее будем считать, что

$$\vec{F} = -c \rho V \vec{V}. \quad (5.37)$$

Плотность атмосферы зависит от высоты h . Считая, что атмосфера в среднем находится в состоянии гидростатического равновесия, то есть

$$dp = -g \rho dh, \quad (5.38)$$

и удовлетворяет уравнению состояния идеального газа, будем иметь, что

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\bar{\mu}g}{RT} dh = -\frac{dh}{H}, \quad (5.39)$$

где $\bar{\mu}$ – относительная молекулярная масса атмосферы, T – ее температура, R – универсальная газовая постоянная, а величина H называется *шкалой высот атмосферы*. Ускорение силы тяжести, строго говоря, зависит высоты:

$$g = \frac{fM}{r^2} = \frac{fM}{(R_0 + h)^2}, \quad (5.40)$$

где R_0 – радиус планеты, а M – ее масса. Температура верхней атмосферы (термосферы) также изменяется с высотой, увеличиваясь благодаря разогреву атмосферы коротковолновым и корпускулярным излучением Солнца. Этот разогрев происходит потому, что излишок энергии фотонов и корпускул переходит в кинетическую энергию продуктов реакций диссоциации и ионизации, происходящих при поглощении солнечного излучения частицами атмосферы. Поэтому также уменьшается с высотой и относительная молекулярная масса атмосферы $\bar{\mu}$. Таким образом, шкала высот атмосферы изменяется в верхней атмосфере, увеличиваясь с высотой. Поэтому, интегрируя (5.39), нужно записать:

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\int_0^h \frac{dh}{H(h)}\right). \quad (5.41)$$

Нас интересует поведение плотности атмосферы на тех высотах, где происходит движение спутника, то есть между высотами перицентра и апоцентра орбиты спутника. Если эксцентриситет орбиты небольшой, то приближенно можно записать, что

$$\rho(r) = \rho_\pi \exp\left(-\frac{r - r_\pi}{H_\pi}\right), \quad (5.42)$$

где ρ_π и H_π – плотность и шкала высот атмосферы в перицентре орбиты спутника. Вспоминая, что расстояние до центра планеты $r = a(1 - e \cos E)$, получим, что разность

$$r - r_\pi = ae(1 - \cos E), \quad (5.43)$$

а плотность атмосферы

$$\rho(r) = \rho_\pi \exp(-\alpha(1 - \cos E)), \quad (5.44)$$

где безразмерный параметр

$$\alpha = \frac{ae}{H}. \quad (5.45)$$

Нагревание атмосферы определяется количеством коротковолнового и корпускулярного излучения Солнца и зависит от широты, времени суток, времени года, но главным образом – от фазы цикла солнечной активности. Поэтому температура верхней атмосферы и ее шкала высот могут изменяться в достаточно широких пределах. Для земной атмосферы на высотах 200÷400 км, где движется большинство ИСЗ, шкала высот колеблется от 30 до 100 км. Если взять как характерные значения $H \approx 60 \div 70$ км, то отношение большой полуоси орбиты к шкале высот будет равно приблизительно 100.

5.3.2. Эволюционные уравнения. Для того чтобы записать уравнения для оскулирующих элементов, которые нужно взять в форме (4.28), надо найти радиальную и нормальную к радиусу-вектору компоненты силы сопротивления атмосферы S и T . Воспользовавшись формулами (2.50) для модуля и компонент скорости, будем иметь на основе (5.37):

$$\begin{aligned} S &= -c\rho \frac{\mu}{p} e \sin v \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}, \\ T &= -c\rho \frac{\mu}{p} (1 + e \cos v) \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Подставляя (5.46) в (4.28), находим:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= 0, \quad \frac{di}{dt} = 0, \\ \frac{dp}{dt} &= -2c\rho \sqrt{\mu p} \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}, \\ \frac{de}{dt} &= -2c\rho \sqrt{\frac{\mu}{p}} (\cos v + e) \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -2c\rho \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\sin v}{e} \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Первые два уравнения дают: $\Omega = \Omega_0, i = i_0$. Это выражает тот факт, что сила сопротивления атмосферы, лежащая в плоскости оскулирующей орбиты, не может изменить положение этой плоскости. Последние три уравнения осредним по периоду оборота спутника, то есть перейдем к эволюционным уравнениям движения. Правая часть уравнения для

periцентрового расстояния является произведением нечетной функции от истинной аномалии v на четную, то есть нечетной функцией. А поскольку функцию, периодическую на промежутке $[0, 2\pi]$, можно интегрировать и в пределах от $-\pi$ до π , то ее среднее значение равно нулю. Вековое возмущение periцентрового расстояния отсутствует, и линия апсид под действием атмосферы лишь покачивается с малой амплитудой. Для средних значений фокального параметра и эксцентриситета будем иметь на основании (4.46), опуская обозначения осреднения:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -2cnp^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho \frac{\sqrt{1+2e\cos v + e^2}}{(1+e\cos v)^2} dv, \\ \frac{de}{dt} &= -2cnp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho \frac{(\cos v + e)\sqrt{1+2e\cos v + e^2}}{(1+e\cos v)^2} dv.\end{aligned}\quad (5.48)$$

Видно, что среднее значение фокального параметра p со временем под влиянием сопротивления атмосферы уменьшается, ибо правая часть первого из уравнений (5.48) положительна. Правая часть второго уравнения может изменять свой знак, но большую часть времени она положительна, и среднее значение первого множителя в числителе подинтегрального выражения, который определяет знак правой части уравнения, равно эксцентриситету e , то есть положительно. Поэтому среднее значение эксцентриситета орбиты также уменьшается. Таким образом, под влиянием сопротивления атмосферы высота полета спутника уменьшается и его орбита приближается к круговой. В конце концов спутник входит в настолько плотные слои атмосферы, что спутник небольших размеров сгорает, а большие объекты типа орбитальных станций разрушаются, то есть тормозящее влияние атмосферы на движение низкого искусственного спутника планеты определяет время его существования на орбите. Для того чтобы оценить это время, нужно проинтегрировать систему уравнений (5.48).

5.3.3. Приближенное интегрирование эволюционных уравнений. Подинтегральные выражения в (5.48) несколько упростятся, если перейти в них от истинной аномалии v к эксцентрисической аномалии E , имея в виду (см. (2.60) и (2.63)), что

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad dv = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} dE. \quad (5.49)$$

Принимая во внимание также (5.44), находим:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -2cnp^2 \frac{\exp(-\alpha)}{1 - e^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\alpha \cos E) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 E} dE, \\ \frac{de}{dt} &= -2cnp \frac{\exp(-\alpha)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\alpha \cos E) \cos E \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 E}}{1 - e \cos E} dE.\end{aligned}\quad (5.50)$$

Для дальнейшего упрощения интегралов в (5.50) воспользуемся уже фактически введенным условием малости эксцентриситета орбиты спутника: $e \ll 1$. При этом будем считать, что значения $e \leq 0.1$, то есть пренебрегая членами порядка e^2 , мы будем допускать погрешность приблизительно в 1

%. Тогда разлагая подинтегральные функции (5.50) в ряд по степеням e и оставляя только линейные по e величины, получим:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -2cn\rho_\pi p^2 \exp(-\alpha) I_0(\alpha), \\ \frac{de}{dt} &= -2cn\rho_\pi p \exp(-\alpha) \left(I_0 + \frac{e}{2}(I_0(\alpha) + I_2(\alpha)) \right),\end{aligned}\quad (5.51)$$

где интегралы

$$I_k(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\alpha \cos E) \cos kE dE \quad (5.52)$$

– это не что иное, как интегральная форма задания *модифицированной функции Бесселя* k -го порядка, равной $i^{-k} J_k(i\alpha)$, где i – мнимая единица. Эти функции разлагаются в степенной ряд:

$$I_k(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{2} \right)^k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha/2)^{2s}}{s!(k+s)!}, \quad (5.53)$$

а при больших ($\alpha \geq 10$) значениях аргумента имеют достаточно простую асимптотику:

$$I_k(\alpha) \approx \frac{\exp(\alpha)}{\sqrt{2\pi\alpha}}. \quad (5.54)$$

Рассмотрим далее два случая: 1) $\alpha \ll 1$ и 2) $\alpha \gg 1$. В первом случае в связи с оценкой $a/H \approx 100$ эксцентриситет e должен быть порядка и меньше 0.001. Во втором, учитывая ранее сделанную оценку ($e \leq 0.1$), величина $\alpha \approx 10$.

В первом случае, пренебрегая членами порядка α^2 и выше, будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -2cn\rho_\pi p^2, \\ \frac{de}{dt} &= -cn\rho_\pi p \left(\frac{p}{H} + 1 \right).\end{aligned}\quad (5.55)$$

Первое уравнение (5.55) легко интегрируется, и

$$p = \frac{p_0}{1 + 2cn\rho_\pi t}, \quad (5.56)$$

что позволяет, зная критическую высоту движения спутника h_{cr} , найти время его существования на орбите. Для земной атмосферы величина h_{cr} в зависимости от фазы цикла солнечной активности колеблется в пределах от 120 км до 180 км с наиболее характерными значениями 150÷160 км. Разделив второе уравнение (5.55) на первое, можно найти эксцентриситет e как функцию параметра p :

$$e = e_0 \sqrt{\frac{p}{p_0}} \exp\left(\frac{p}{p_0}\right). \quad (5.57)$$

Во втором случае асимптотика (5.54) приводит к таким уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -\frac{2cn}{\sqrt{2\pi}} \rho_\pi \sqrt{H_\pi} p \sqrt{\frac{p}{e}}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{2cn}{\sqrt{2\pi}} \rho_\pi \sqrt{H_\pi} (1+e) \sqrt{\frac{p}{e}}.\end{aligned}\tag{5.58}$$

Снова разделив второе уравнение на первое, найдем, что

$$e = (e_0 + 1) \frac{p}{p_0} - 1.\tag{5.59}$$

Исключая из первого уравнения (5.58) эксцентриситет e с помощью (5.59), можно и в этом случае найти зависимость фокального параметра p от времени t , но конечный результат тут достаточно громоздкий. Обратим внимание на то, что благодаря тому, что рассматриваются малые и к тому же все уменьшающиеся значения эксцентриситета, уменьшение величин p и e происходит все быстрее и быстрее.

Таким образом, найдены зависимости средних значений параметра орбиты p от времени t , а эксцентриситета e от параметра p для очень малых ($e \leq 0.001$) и малых, но не очень ($e \approx 0.1$), значений эксцентриситета (см. рис. 5.7). Для промежуточных значений эксцентриситета ($e \approx 0.01$) результаты могут быть найдены интерполяцией между выше рассмотренными случаями. Более подробное рассмотрение влияния сопротивления атмосферы на движение искусственного спутника проведено в [22] (см. также задачу 5.8).

При малом эксцентриситете параметр p практически равен большой полуоси орбиты a . Сделав соответствующую замену в первом из уравнений (5.58), можно с помощью третьего закона Кеплера привести его к такому виду:

$$\rho_\pi \sqrt{H_\pi} \approx A \sqrt{\frac{a}{e}} \frac{\dot{T}}{T},\tag{5.60}$$

где A – некоторый коэффициент. Полученное соотношение позволяет оценить физические характеристики атмосферы на высотах, где движется спутник, имея лишь оценки величин a и e и, хотя бы из визуальных наблюдений за движением спутника, оценки скорости изменения периода обращения спутника T .

Задачи к главе V

5.1. Что происходит с прецессией линии узлов тогда, когда наклонение орбиты стремится к нулю?

5.2. Показать, что постоянная по модулю радиальная возмущающая сила не изменяет фокальный параметр орбиты, а постоянная по модулю возмущающая сила, перпендикулярная к плоскости орбиты, оставляет неизменной большую полуось орбиты.

5.3. Каким должно быть сжатие Солнца, чтобы вызвать прецессию линии апсид Меркурия со скоростью в $43''$ за сто лет?

5.4. Найти вековую часть возмущения от четвертой зональной гармоники возмущающего потенциала сжатой планеты.

5.5. Показать, что эллиптические координаты в задаче двух неподвижных центров равны

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2c}, \quad \mu = \frac{r_1 - r_2}{2c}$$

и выяснить их геометрический смысл.

5.6. Вычислить, при каких значениях эксцентриситета и наклонения орбиты относительно эклиптики будет отсутствовать вековое возмущение перигейного расстояния в возмущенном движении низкого ИСЗ.

5.8. Представте себе, что Луна находится на орбите с нынешними значениями большой полуоси и эксцентриситета, но с наклонением к эклиптике, которое дополняет нынешнее до 90° . Какое наибольшее значение сможет принять в возмущенном движении под влиянием Солнца эксцентриситет e и какое наименьшее – расстояние до центра Земли в перигее r_π ?

5.8. Получить следующие формулы для изменения средних значений большой полуоси, расстояния спутника в periцентре и периода оборота под влиянием сопротивления атмосферы:

$$\delta a = -4\pi c \rho_\pi a^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} + e\alpha \right),$$

$$\delta r_\pi = -4\pi c \rho_\pi a^2 (1 - e) \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{e}{2} + \frac{e\alpha}{2} \right),$$

$$\delta T = -\frac{12\pi^2}{\sqrt{\mu}} c \rho_\pi a^{5/2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} + e\alpha \right).$$

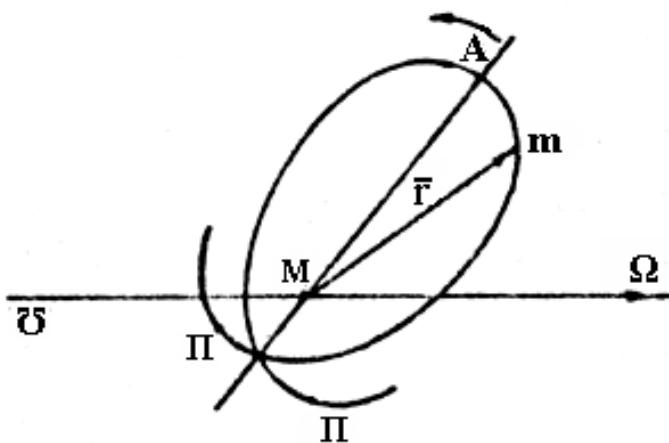


Рис. 5.2. Прецессия линии апсид

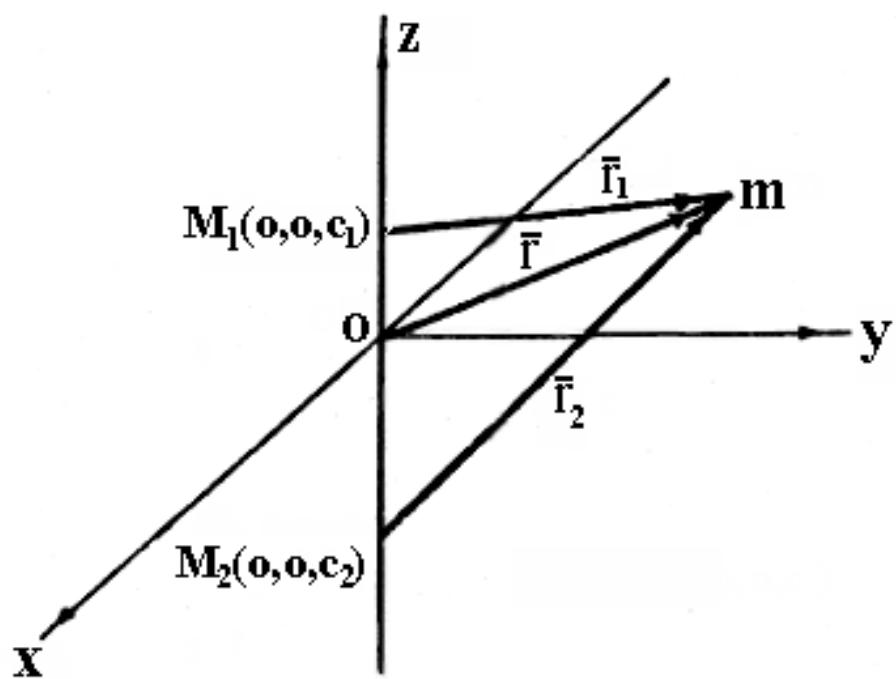


Рис. 5.3. Задача двух неподвижных центров

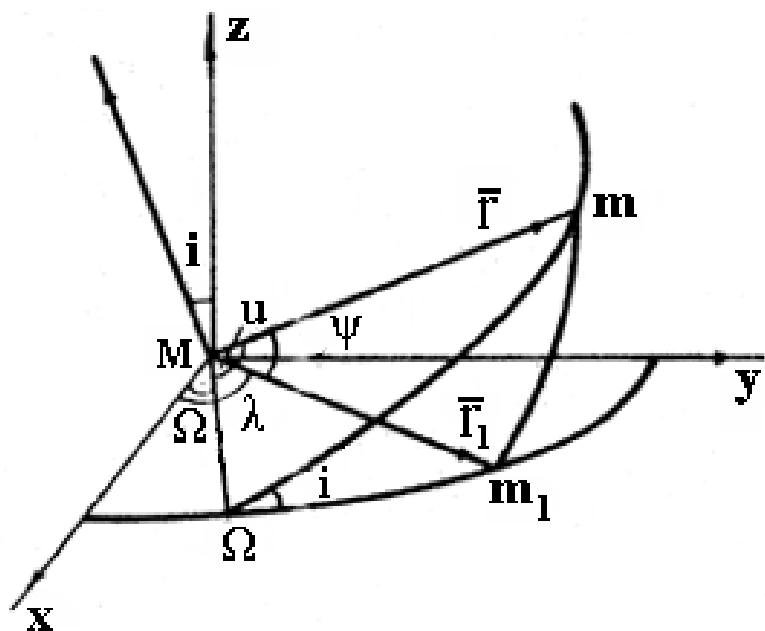


Рис. 5.4. Возмущение движения спутника m третьим телом m_1

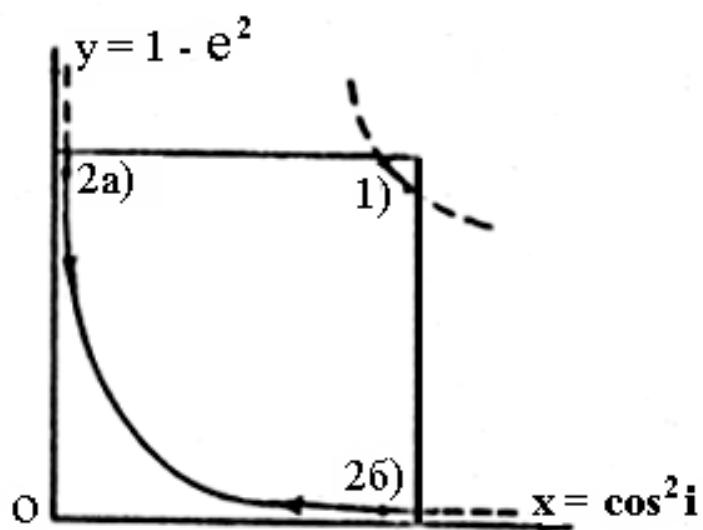


Рис. 5.5. Устойчивый и неустойчивый случаи возмущённого движения спутника: 1 - $c \approx 1$ - устойчивый ;
2 - $c \ll 1$ - неустойчивый

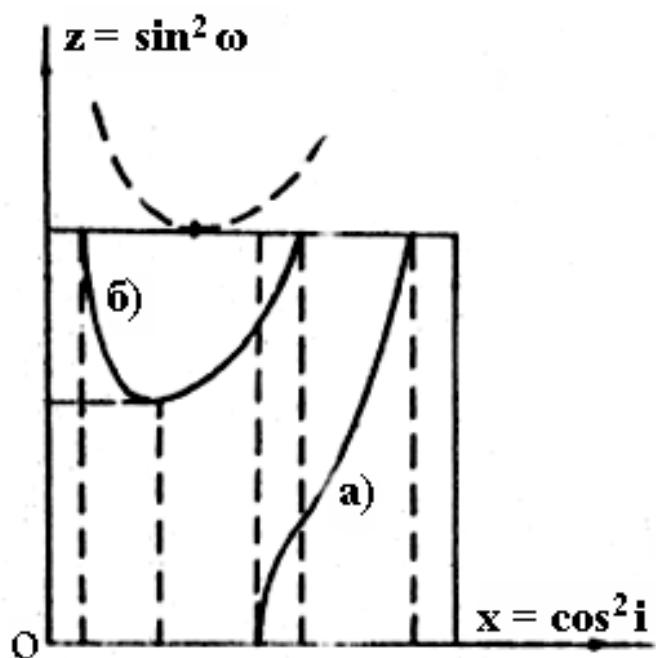


Рис. 5.6. Ротационный а) и либрационный б) случаи возмущенияperiцентрического расстояния орбиты спутника

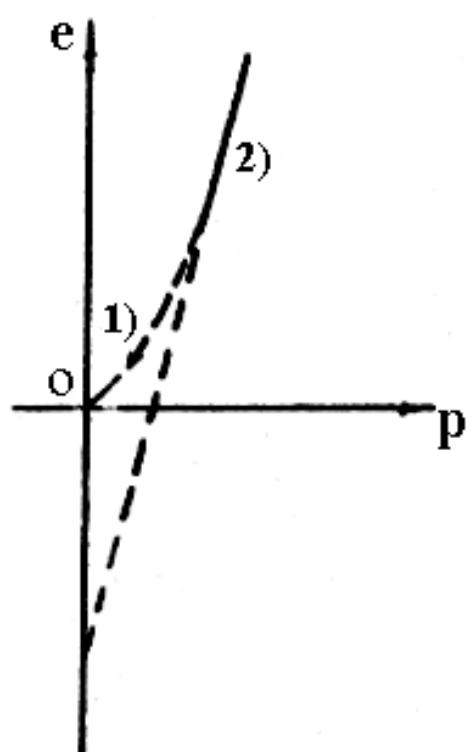


Рис. 5.7. Зависимость между оскулирующими значениями эксцентриситета и параметра возмущённой орбиты

Глава VI. ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Задачей, не интегрируемой в конечном виде, однако такой, которая нередко моделирует реальные системы небесных тел и поэтому достаточно хорошо исследована, является *задача трех тел*. То есть задача о движении трех материальных точек в поле сил взаимного тяготения. Это – тройная звездная система, системы “Земля – Луна – Солнце”, “Солнце – планета – комета”, “Земля – Луна – ИСЗ” и т. п.

Уравнения задачи трех тел в инерциальной системе координат как частный случай ($n=2$) системы уравнений задачи многих тел (1.22) суть (рис. 6.1):

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{R}}_0 &= fm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{\Delta_{01}^3} + fm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_0}{\Delta_{02}^3}, \\ \ddot{\vec{R}}_1 &= fm_0 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_1}{\Delta_{01}^3} + fm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{\Delta_{12}^3}, \\ \ddot{\vec{R}}_2 &= fm_0 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_2}{\Delta_{02}^3} + fm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_2}{\Delta_{12}^3}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Это система 18-го порядка. На основе соображений пункта 1.2.3 ее порядок можно понизить до шестого порядка, а далее интегрировать каким-либо приближенным методом. Но в общей задаче трех тел выделяется важный практически и упрощающий ее систему уравнений случай. Это такая ситуация, когда масса одной из трех материальных точек чрезвычайно мала по сравнению с массами двух других точек.

6.1. Ограниченнная задача трех тел

Случай, когда масса $m \equiv m_0 \ll m_1, m_2$, то есть масса m пренебрежимо мала по сравнению с массами m_1, m_2 , получил название *ограниченной задачи трех тел*. Такая задача впервые была рассмотрена П. Лапласом при исследовании движения комет вблизи одной из планет-гигантов. Она идеально описывает ситуацию, когда одна из материальных точек – это космический аппарат. Физическая суть ограниченной задачи трех тел состоит в том, что одна из точек имеет настолько малую массу, что практически не влияет на движение двух других точек, а сама движется в их гравитационном поле. Тем самым, движение этих двух точек (как говорят, “тяжелых точек”) является кеплеровским и может считаться известным. В соответствии с этим ограниченная задача трех тел может быть круговой, эллиптической и т. д. Далее будем рассматривать самый простой случай – *круговую ограниченную задачу трех тел*.

6.1.1. Круговая ограниченная задача трех тел. В этом случае тяжелые точки M_1, M_2 с массами m_1, m_2 находятся одна от другой на постоянном расстоянии a и обращаются одна вокруг другой или вокруг их центра масс с постоянной угловой скоростью

$$n = \frac{f(m_1 + m_2)}{a^{3/2}}.\tag{6.2}$$

В последних двух уравнениях задачи трех тел (6.1) в ограниченной задаче выпадают первые слагаемые справа, и эти два уравнения образуют систему уравнений задачи двух тел с известным решением. Остается первое уравнение – уравнение движения точки малой массы m :

$$\ddot{\vec{R}} = fm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}}{\rho_1^3} + fm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}}{\rho_2^3}, \quad (6.3)$$

где через $\rho_{1,2}$ обозначены расстояния точки M до точек $M_{1,2}$. В круговой ограниченной задаче трех тел целесообразно перейти к барицентрической системе координат, вращающейся вокруг центра масс с угловой скоростью n . Внешне ограниченная задача трех тел станет похожей на задачу двух неподвижных центров. Но принципиальное физическое различие между этими двумя задачами таково: в задаче двух неподвижных центров движение третьей точки происходит в инерциальной системе координат, и эта точка не влияет на состояние первых двух точек по самой постановке задачи, а в ограниченной задаче трех тел – в неинерциальной системе, а на движение первых двух точек третья точка не влияет из-за своей очень малой массы. Для того, чтобы перейти к уравнению движения точки M в этой неинерциальной системе координат, нужно учесть силы инерции, действующие на материальную точку в системе координат, которая равномерно вращается. Это сила Кориолиса, равная $-2\vec{n} \times \dot{\vec{r}}$, и центробежная сила, равная $-\vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r}$, где \vec{n} – вектор угловой скорости системы координат, \vec{r} – радиус-вектор точки M . В итоге будем иметь:

$$\ddot{\vec{r}} = -2\vec{n} \times \dot{\vec{r}} - \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r} - fm_1 \frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1^3} - fm_2 \frac{\vec{\rho}_2}{\rho_2^3}, \quad (6.4)$$

где радиусы-векторы $\vec{\rho}_{1,2}$ определяют положение точки M относительно тяжелых точек $M_{1,2}$, то-есть $\vec{\rho}_{1,2} = \vec{r} - \vec{r}_{1,2}$, а $\vec{r}_{1,2}$ – радиусы-векторы точек $M_{1,2}$ (рис. 6.2). При этом имеется в виду, что ось z системы координат направлена по вектору \vec{n} , а ось x проходит через точки M_1 и M_2 . Тогда в координатной форме уравнения (6.4) будут такими:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2n\dot{y} + n^2 x + fm_1 \frac{x_1 - x}{\rho_1^3} + fm_2 \frac{x_2 - x}{\rho_2^3}, \\ \ddot{y} &= -2n\dot{x} + n^2 y - fm_1 \frac{y}{\rho_1^3} - fm_2 \frac{y}{\rho_2^3}, \\ \ddot{z} &= -fm_1 \frac{z}{\rho_1^3} - fm_2 \frac{z}{\rho_2^3}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Наконец, для дальнейшего рассмотрения задачи введем специальную (каноническую) систему единиц. Возьмем за единицу длины расстояние a , за единицу массы – сумму масс $m_1 + m_2$, и за единицу времени – время, за которое система координат поворачивается на один радиан. Тогда величина угловой скорости n будет равна 1, а из (6.2) следует, что гравитационная постоянная f в этой системе единиц также равна 1. Обозначим, кроме того, массу точки M_1 в этой системе единиц как μ , тогда масса точки M_2 будет

равняться $1 - \mu$, а координаты точки M_1 будут $(1 - \mu, 0, 0)$, точки M_2 – $(-\mu, 0, 0)$. Будем также считать, что $m_1 < m_2$, то есть $\mu < 1/2$. Теперь система уравнений (6.5) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} + x + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - x) - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}(\mu - x), \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{\mu}{\rho_1^3}y - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{\rho_1^3}z - \frac{\mu}{\rho_2^3}z.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Умножив уравнения системы (6.6) на компоненты вектора относительной скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ соответственно, найдем, складывая их:

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1 - \mu)}{\rho_2}\right),\tag{6.7}$$

где $v^2 = |\dot{r}|$. Интегрируя (6.7), получим первый интеграл ограниченной круговой задачи трех тел:

$$v^2 = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1 - \mu}{\rho_2}\right) - c.\tag{6.8}$$

Этот первый интеграл называется *интегралом Якоби*. Он является аналогом интеграла энергии, ибо справа стоит удвоенный *обобщенный потенциал* задачи, равный сумме центробежного и гравитационного потенциалов. Интеграл Якоби используется для исследования устойчивости в задаче трех тел. В астродинамике он находит такое применение. Траекторию межпланетного перелета можно разделить на три участка: два относительно небольших планетоцентрических и один основной – гелиоцентрический, и на каждом из этих участков считать движение космического аппарата кеплеровским (метод *кусочно-конической аппроксимации*). А для оптимизации перехода от одного участка траектории к следующему как раз и используется интеграл Якоби, ибо на переходных этапах полета мы имеем ситуацию ограниченной задачи трех тел.

Если обобщенный потенциал задачи обозначить как U , то есть

$$U = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1 - \mu}{\rho_2}\right),\tag{6.9}$$

то уравнения ограниченной круговой задачи трех тел приобретут более компактный вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z},\end{aligned}\tag{6.10}$$

а интеграл Якоби примет такой вид: $v^2 = 2U - c$.

6.1.2. Плоская круговая ограниченная задача трех тел. Если начальные условия в ограниченной задаче трех тел будут такими, что при $t = t_0$ будут $z_0 = \dot{z}_0 = 0$, то, как это вытекает из последнего уравнения (6.6), аппликата z тождественно будет равна нулю. То есть движение будет плоским. И мы получим *плоскую круговую ограниченную задачу трех тел*. Для ее исследования целесообразно, как это нередко делается в плоских задачах, перейти к комплексной координате $z = x + iy$. Не совсем удачным обстоятельством является то, что по традиции и третья декартова координата, и комплексная переменная обозначаются одной и той же буквой z . Не будем нарушать эту традицию, но будем помнить, что далее в этой главе z – это комплексная координата на плоскости, кроме отдельно оговоренных случаев.

Умножив второе уравнение (6.6) на мнимую единицу i и складывая его с первым уравнением, получим такое уравнение плоской круговой ограниченной задачи трех тел:

$$\ddot{z} = -2i\dot{z} + z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - z) - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}(\mu + z). \quad (6.11)$$

При этом $\rho_{1,2} = |z - z_{1,2}|$. Интеграл Якоби принимает теперь такой вид:

$$|\dot{z}|^2 = |z|^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1 - \mu}{\rho_2}\right). \quad (6.12)$$

В отличие от задачи двух тел, в которой (за исключением прямолинейного движения) расстояние между точками всегда больше нуля, в задаче трех тел возможны столкновения материальных точек. При этом ускорения резко возрастают, нарушаются непрерывность правых частей уравнений движения. Чтобы избежать этого, датский астроном Т. Тиле предложил специальную замену переменных в уравнении плоской ограниченной задачи трех тел в комплексной форме (6.11). Во-первых, начало координат переносится в середину отрезка M_1M_2 :

$$z = \zeta + \mu - \frac{1}{2}. \quad (6.13)$$

Потом выполняется переход от комплексной координаты ζ к новой комплексной переменной w :

$$\zeta = \cos w. \quad (6.14)$$

Одновременно делается дифференциальная замена времени t на новую переменную τ :

$$dt = \rho_1 \rho_2 d\tau. \quad (6.15)$$

Смысл последней замены нетрудно понять. Как только одно из расстояний $\rho_{1,2}$ стремится к нулю, время начинает как бы растягиваться, как при демонстрации кинофильма со все меньшей и меньшей скоростью. Замена (6.14) полезна тем, что софокусные эллипсы и гиперболы в плоскости ζ переходят в плоскости w в прямые, параллельные осям координат. Чтобы убедиться в этом, нужно в равенстве (6.14) выделить вещественную и

мнимую части. А поскольку близи одной из тяжелых точек движение точки малой массы будет близким к кеплеровскому, то это движение в плоскости w будет изображаться линиями, близкими к прямым, параллельным координатным осям. И тем более близким, чем ближе точка малой массы к одной из тяжелых точек. Особо важное значение это *преобразование Тиле* приобрело в астродинамике при расчетах траекторий попадания при перелете с одного небесного тела на другое, например, с Земли на Луну.

Продолжая упрощение рассматриваемой задачи, можно перейти к случаю прямолинейного движения. Во-первых, это будет при начальных условиях $x_0 \neq 0$ и $\dot{x}_0 \neq 0$, а $y_0 = \dot{y}_0 = 0$. При этом точка M будет двигаться вдоль оси x и или столкнется с одной из тяжелых точек, или удалится от них на бесконечность. Другой случай прямолинейного движения будет иметь место при таких условиях: $\mu = 1/2$, $x_0 = \dot{x}_0 = 0$. Точка M снова-таки или удалится на бесконечность, или начнет колебаться вдоль отрезка оси y , симметричного относительно оси x . Напомним, что все это будет происходить в относительной системе координат, вращающейся вместе с тяжелыми точками вокруг их центра масс.

6.2. Точки либрации. Линии Хилла

6.2.1. Точки либрации. Зададим такой вопрос: может ли точка малой массы в ограниченной задаче трех тел находиться в состоянии равновесия относительно тяжелых точек в системе координат, вращающейся вместе с ними. В инерциальной системе это, вообще говоря, невозможно, ибо под действием двух сил, не направленных по одной прямой, состояние равновесия невозможно. В относительной системе такая точка находится под действием трех сил – двух гравитационных и центробежной, которые имеют различные направления. И поэтому состояние равновесия возможно. Найдем решения, которые дают положения точки малой массы в состоянии равновесия в плоской круговой ограниченной задаче трех тел. Эти точки относительного равновесия носят названия *точек либрации*.

В состоянии равновесия ускорение \ddot{z} и скорость \dot{z} тождественно равны нулю. Поэтому уравнение, которому должна удовлетворять комплексная координата z , таково:

$$z + \frac{\mu}{\rho_1^3} (1 - \mu - z) - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3} (\mu + z) = 0 \quad (6.16)$$

или

$$z \left(1 - \frac{\mu}{\rho_1^3} - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3} \right) = \mu(1 - \mu) \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3} \right). \quad (6.17)$$

Поскольку правая часть (6.17) вещественна, то или координата z должна быть вещественной, или эта правая часть и вещественный множитель в скобках слева должны равняться нулю.

Начнем с последней возможности. Из равенства нулю правой части (6.17) следует, что $\rho_1 = \rho_2$. Тогда из равенства нулю множителя слева

получаем, что $\rho_1 = \rho_2 = 1$. А так как расстояние между точками M_1 и M_2 также равно единице, то все три точки образуют равносторонний треугольник. Возможны две такие конфигурации – одна отвечает значению $y > 0$, другая – координате $y < 0$ (рис. 6.3). Эти точки обозначаются буквами L_4 и L_5 и называются *треугольными точками либрации*.

Если же координата z вещественна, то все возможные точки либрации лежат на одной прямой – оси x . При этом их координаты и расстояния до точек $M_{1,2}$ связаны определенными соотношениями. Но эти соотношения будут зависеть от того, где именно располагается точка малой массы – между тяжелыми точками или с той, или другой стороны от них обеих. Рассмотрим каждую из этих ситуаций отдельно.

а) Точка M лежит между точками M_1 и M_2 . Тогда (рис. 6.4а) имеем:

$$\rho_1 + \rho_2 = 1, \quad \mu + z + \rho_1 = 1. \quad (6.18a)$$

Исключая из уравнения (6.17) с помощью (6.18) ρ_2 и z , получим:

$$(1 - \mu - \rho_1) \left(1 + \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1 - \mu}{(1 - \rho_1)^3} \right) = \mu(1 - \mu) \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{(1 - \rho_1)^3} \right). \quad (6.19)$$

Если привести (6.19) к общему знаменателю, то найдем для расстояния ρ_1 алгебраическое уравнение пятой степени:

$$\rho_1^5 - (3 - \mu)\rho_1^4 + (3 - 2\mu)\rho_1^3 - \mu(1 - \rho_1)^2 = 0. \quad (6.20)$$

б) Точка M лежит справа от точки M_1 . Тогда (рис. 6.3б)

$$\rho_2 = 1 + \rho_1, \quad \mu + z - \rho_1 = 1 \quad (6.18b)$$

и соответствующее уравнение для величины ρ_1 , снова-таки пятой степени, будет таким:

$$\rho_1^5 + (3 - \mu)\rho_1^4 + (3 - 2\mu)\rho_1^3 - \mu(1 + \rho_1)^2 = 0. \quad (6.21)$$

в) Наконец, если точка M расположена слева от точки M_2 , то (рис. 6.3в)

$$\rho_1 = \rho_2 + 1, \quad \rho_2 = z + \mu. \quad (6.18v)$$

Отсюда и (6.17) находим такое уравнение для расстояния ρ_2 :

$$\rho_2^5 + (2 + \mu)\rho_2^4 + (1 - 2\mu)\rho_2^3 - (1 - \mu)(1 + \rho_2)^2 = 0. \quad (6.22)$$

Можно показать, что каждое из полученных уравнений пятой степени имеет только по одному вещественному корню. Таким образом, мы имеем три *прямолинейные точки либрации*. Они обозначаются как L_1 (между точками M_1 и M_2), L_2 (справа от тяжелой точки меньшей массы M_1) и L_3 (слева от тяжелой точки большей массы M_2). Значения расстояний ρ_1 и ρ_2 могут быть вычислены методом итераций. Например, для точки L_1 по формуле:

$$\rho_1^{(k)} = \left(\frac{\mu(1 - \rho_1^{(k-1)})^2}{(\rho_1^{(k-1)})^2 - (3 - \mu)\rho_1^{(k-1)} + 3 - 2\mu} \right)^{1/3}. \quad (6.23)$$

Можно также получить ряды для значений ρ_1 по степеням $\mu^{1/3}$ и для ρ_2 по степеням μ . Они имеют такой вид:

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \mu^{1/3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \mu^{2/3} - \frac{1}{27} \mu + \dots, \quad (L_1)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \mu^{1/3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \mu^{2/3} - \frac{1}{27} \mu + \dots, \quad (L_2) \quad (6.24)$$

$$\rho_2 = \frac{7}{12} \mu + \frac{1127}{20736} \mu^3 + \dots. \quad (L_3)$$

Видим, что при значениях $\mu \ll 1$ точки либрации L_1 и L_2 лежат близко от точки M_1 на приблизительно одинаковых расстояниях от нее.

Прямолинейные точки либрации как частные решения уравнений круговой ограниченной задачи трех тел были известны еще Л. Эйлеру. Потом они были переокрыты Ж. Лагранжем, он же обнаружил треугольные точки либрации. Лагранж также установил, что точки либрации имеют место и в эллиптической, и даже в неограниченной задачах трех тел. В эллиптической задаче роль расстояния a играет фокальный параметр p относительного кеплеровского движения тяжелых точек. Поэтому все эти решения и точки либрации называются также лагранжевыми.

Интересным свойством точек либрации является также следующее. Если разместить в прямолинейных или треугольных точках либрации три материальные точки и предоставить им двигаться с нулевыми (в инерциальной системе координат) начальными условиями, то они все три одновременно столкнутся в их центре масс.

Точки либрации имеют важное значение в астрономии и астродинамике. Наиболее известное явление, связанное с ними, – это существование двух групп астероидов, которые скопились в окрестностях треугольных точек либрации системы “Солнце – Юпитер”. Так как астероиды, движущиеся на 60° впереди Юпитера, названы именами героев греческого войска, которое осаждало Трою, а движущиеся на 60° позади Юпитера, – именами защитников Трои, то все эти астероиды называются “*тロянцами*”. В треугольных точках либрации системы “Земля – Луна” польский астроном К. Кордылевский обнаружил скопления метеорного вещества, которые получили название *облаков Кордылевского*. Эти же точки либрации неоднократно привлекали внимание ученых, разрабатывающих проекты дальнейшего освоения космоса человеком. Известный проект размещения в треугольных точках либрации системы “Земля – Луна” поселений с населением до 100 тыс. человек принадлежит американскому ученому О. Нейлу. В одну из точек либрации системы „Солнце – Земля“ был запущен космический аппарат SOHO для изучения процессов на Солнце. Для разработки и реализации таких проектов важно знать характер влияния возмущений на движение тел, которые находятся в точках либрации. К рассмотрению этого вопроса мы теперь и перейдем.

6.2.2. Устойчивость движения в точках либрации. Запишем уравнения для возмущений в виде, принятом в теории устойчивости (пункт 4.3.1), то есть

$$\ddot{x}_i = 2(-1)^{i+1} \dot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i=1,2, \quad (6.25)$$

где x_i – возмущения координат x, y относительно постоянных значений этих координат в точках либрации, а обобщенный потенциал U имеет вид (6.9). Разлагая этот потенциал в ряд Маклорена, получим линеаризованные уравнения возмущенного движения:

$$\ddot{x}_i = 2(-1)^{i+1} \dot{x}_i + \sum_{j=1}^2 p_{ij} x_j, \quad (6.26)$$

где

$$p_{ij} = 2^{1-\delta_{ij}} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x_i=x_j=0}. \quad (6.27)$$

Вычисление коэффициентов p_{ij} с помощью (6.27) даст такие результаты:

$$\begin{aligned} p_{11}^{(k)} &= 1 + 2A, \quad p_{22}^{(k)} = 1 - A, \\ p_{12}^{(k)} = p_{21}^{(k)} &= 0, \quad A = \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}, \quad k=1,2,3, \\ p_{11}^{(k)} &= \frac{3}{4}, \quad p_{22}^{(k)} = \frac{9}{4}, \quad p_{12}^{(k)} = (-1)^k \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu), \quad k=4,5, \end{aligned} \quad (6.28)$$

где k – номер точки либрации.

Если теперь искать решение системы (6.26) в комплексной форме $A_l \exp(\omega_l t)$, то для амплитуд A_l получим следующую алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - p_{11})A_1 - (2\omega + p_{12})A_2 &= 0, \\ (2\omega - p_{21})A_1 + (\omega^2 - p_{22})A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.29)$$

А для того, чтобы эта однородная система уравнений имела ненулевое решение, нужно, чтобы ее детерминант

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - p_{11} & -2\omega - p_{12} \\ 2\omega - p_{21} & \omega^2 - p_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.30)$$

Значения частот ω как корней характеристического уравнения (6.30) и будут определять характер возмущенного движения в окрестностях точек либрации в линейном приближении. Уравнение (6.30) является биквадратным уравнением

$$\omega^4 + p\omega^2 + q = 0, \quad (6.31)$$

где

$$p = 2 - A, \quad q = (1 + 2A)(1 - A), \quad k = 1,2,3 \quad (6.32)$$

и

$$p = 1, \quad q = \frac{27}{4}\mu(1-\mu), \quad k = 4,5. \quad (6.33)$$

Вычисление дискриминанта этого уравнения $D = p^2 / 4 - q$ показывает, что

$$D = \frac{9}{4}A \left(A - \frac{8}{9} \right) \quad k = 1,2,3 \quad (6.34)$$

и

$$D = \frac{1}{4}(1 - 27\mu(1 - \mu)), \quad k = 4,5. \quad (6.35)$$

Анализ значений дискриминанта D согласно (6.34) и (6.35) и соответствующих ему значений частот ω приводит к следующим выводам. Прямолинейные точки либрации в линейном приближении неустойчивы, ибо всегда есть одна вещественная положительная частота. В случае треугольных точек либрации ситуация связана с соотношением между значением массы μ и корнем уравнения

$$1 - 27\mu(1 - \mu) = 0, \quad (6.36)$$

а именно тем его корнем, который лежит между 0 и $1/2$ и равен $\bar{\mu} \approx 0.038$. При значениях $\mu > \bar{\mu}$ треугольные точки либрации неустойчивы. При $\mu < \bar{\mu}$ треугольные точки либрации устойчивы в линейном приближении. Убедиться в этом предоставляем возможность читателю самому (см. задачу 6.2).

Что же касается устойчивости точек либрации в точном решении задачи, то теория устойчивости Ляпунова (пункт 4.3.1) подтверждает выводы, сделанные по линейному приближению о неустойчивости прямолинейных точек либрации и треугольных точек при $\mu > \bar{\mu}$, но не дает ответа в практически важном случае $\mu < \bar{\mu}$. Этот ответ был найден лишь в 1968 г. методами теории КАМ. Было показано, что треугольные точки либрации устойчивы для всех значений массы $\mu < \bar{\mu}$ кроме двух значений, равных

$$\mu_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{213}}{30}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1833}}{90}. \quad (6.37)$$

Этот результат подтверждается существованием «троянцев» и облаков Кордылевского и делает треугольные точки либрации, представляющими интерес для космонавтики.

Наконец, укажем, что исследование точек либрации в пространственном (трехмерном) движении приводит к характеристическому уравнению

$$(\omega^2 + s)(\omega^4 + p\omega^2 + q) = 0, \quad (6.38)$$

где

$$s_k = A, \quad k = 1, 2, 3, \quad s_k = 1, \quad k = 4, 5. \quad (6.39)$$

Видно, что обе дополнительные частоты мнимые, и поэтому точки либрации устойчивы в первом приближении по отношению к отклонениям от плоскости вращения тяжелых точек.

Исследованы также решения задачи трех тел, близкие к точкам либрации, с точки зрения их периодичности и найдены условия, когда такие периодические решения существуют (см. [18, 37]).

6.2.3. Линии Хилла. Интеграл Якоби дает возможность провести качественное исследование ограниченной круговой задачи трех тел, которое позволяет выделить те области, где движение точки малой массы может

происходить при данных начальных условиях, и те, где это движение невозможно. Проведем такое исследование для плоского случая.

Пусть относительная скорость v точки в ее движении обратилась в нуль (при этом ускорение, вообще говоря, отлично от нуля). Геометрическое место тех точек, где это будет так, согласно интегралу Якоби (6.8) задается таким уравнением:

$$2U(x, y) - c = r^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} - c = 0. \quad (6.40)$$

На плоскости x, y это будет некоторая линия, которую назовем линией нулевой скорости или линией Хилла (по имени американского астронома Дж. Хилла). Поскольку ускорение $\dot{v} \neq 0$ (иначе это будет изолированная точка – точка либрации), то точки, образующие линию Хилла, не будут точками экстремумов функции $U(x, y)$. Поэтому эта функция должна изменять свой знак, если точка M в своем движении пересекает линию Хилла. Но тогда по одну сторону от этой линии квадрат скорости v^2 должен быть отрицательным, что невозможно. Поэтому точка малой массы может двигаться лишь в той части плоскости, где выполняется такое условие:

$$2U(x, y) - c \geq 0. \quad (6.41)$$

Заметим в связи с этим, что координаты точек либрации можно найти как точки экстремумов функции $U(x, y)$.

Начнем дальнейший анализ с достаточно больших значений постоянной Якоби c . Если $c \gg 1$, то должны быть или значительно большими 1 величина r , или малым одно из расстояний $\rho_{1,2}$. В первом случае второе и третье слагаемые в (6.41) малы по сравнению с c (точка M достаточно далека от точек $M_{1,2}$). Поэтому приближенно уравнение линии Хилла имеет вид $r^2 = c$, и эта линия близка к окружности радиуса \sqrt{c} . Во втором случае второе или третье слагаемое в (6.41) значительно больше 1, в то время как $r^2 \approx 1$. И приближенное уравнение линии Хилла в этом случае такое:

$$\frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c. \quad (6.42)$$

Это уравнение задает две замкнутые кривые, одна из которых окружает точку M_1 , другая – точку M_2 . Эти кривые имеют в геометрии название „овалы” и внешне похожи на эллипсы (однако эллипс лежит внутри овала с такими же осями). Эти овалы на рис. 6.5 вместе с окружностью $r^2 = c$ обозначены цифрой 1. Движение точки малой массы возможно лишь за пределами окружности с большим радиусом \sqrt{c} или в середине одного из овалов, то есть вблизи одной из точек $M_{1,2}$. Обратим внимание на то, что в каждом из этих трех случаев движение точки малой массы близко к движению в задаче двух тел с массами $m_1 + m_2$, m_1 или m_2 соответственно и может быть изучено методами теории возмущений.

При уменьшении постоянной c окружность и овалы начнут все больше деформироваться, причем квазикружность начнет уменьшаться, а

квазиовалы – увеличиваться. И при некотором критическом значении $c = c_1$ овалы коснутся один другого. Произойдет это как раз во внутренней точке либрации L_1 (кривая 2 на рис. 6.5).

При дальнейшем уменьшении величины c ($c < c_1$) горловина, соединяющая бывшие овалы, начнет расширяться, и область, в которой возможно движение точки M , станет двухсвязной (кривые 3 на рис. 6.5). При критическом значении $c = c_2$ внутренняя и внешняя линии Хилла коснутся друг друга в точке либрации L_2 (кривая 4 на рис. 6.5).

Потом при $c > c_2$ будет расширяться горловина возле точки L_2 – область движения точки малой массы станет односвязной (кривая 5 на рис. 6.5). Если и далее уменьшать значение c до критического значения $c = c_3$, то коснутся друг друга внешняя и внутренняя части линии Хилла в точке либрации L_3 (кривая 6 на рис. 6.5).

При значениях $c < c_3$ единая линия Хилла снова разорвется на две замкнутые линии (похожие на разрез крыла самолета, кривые 7 на рис. 6.5), и движение точки M станет возможным всюду вне областей, окружающих треугольные точки либрации L_4 и L_5 . Наконец, значение c при дальнейшем его уменьшении достигнет критического значения c_4 , при котором линии Хилла сятся в точки либрации $L_{4,5}$.

Из проведенного анализа можно увидеть особую роль, которую играют точки либрации в структуре линий Хилла. В прямолинейных точках либрации нарушается однозначность линий Хилла – это точки их самопересечения. Треугольные точки – это предельные точки семейства линий Хилла. Критические значения постоянной Якоби c_k можно найти, подставляя в (6.40) значения координат точек либрации x_k, y_k . Значения c_k , как и координаты точек либрации, зависят от параметра μ , то есть от соотношения между масами тяжелых точек M_1 и M_2 .

Если рассмотреть геометрическое место точек нулевой относительной скорости v в пространственной ограниченной задаче трех тел, то это уже будут *поверхности Хилла*. А рис. 6.5 будет давать представление о структуре сечений поверхностей Хилла плоскостью $z=0$ (где z уже аппликата точки M). Структура сечений поверхностей Хилла плоскостью $y=0$ с уравнением

$$x^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c \quad (6.43)$$

показана на рис. 6.6. А структуру сечений плоскостью $x=0$, которые определяются уравнением

$$y^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c, \quad (6.44)$$

можно увидеть на рис. 6.7.

Особо важную роль поверхности Хилла играют в физике двойных звездных систем, а именно те поверхности, которые отвечают критическому

значению постоянной Якоби c_1 . При этом образуются две касающиеся друг друга яйцеподобные области вокруг точек $M_{1,2}$, которые называются *полостями Роша*. Их значение состоит в том, что только тогда, когда один из компонентов двойной системы заполняет свою полость Роша, возможно эффективное перетекание вещества с этого компонента на другой. В этом случае двойная система называется *тесной двойной системой* (ТДС). Особенно интересные явления возникают в ТДС тогда, когда этот другой компонент – массивная звезда на конечной стадии эволюции (пульсар или черная дыра). Тогда ускорение вещества, падающего на этот компактный объект, достигает очень больших значений. Поэтому резко возрастает температура этого вещества, и аккреционный диск, образующийся вследствие осевого вращения компактного компонента, становится источником рентгеновского излучения. А прецессионное движение в такой двойной системе может приводить к наблюдаемой переменности этого источника.

Практически важным является тот случай, когда постоянная Якоби $c \gg 1$ за счет того, что $\rho_1 \ll 1$, то есть точка малой массы движется в непосредственной окрестности тяжелой точки меньшей массы (система “Солнце – планета – ее спутник”). Исследование в этом случае решений, в частности, периодических, получило название *задачи Хилла*. При этом, если отказаться от канонической системы единиц, можно считать, что расстояние a бесконечно велико, но при условии, что величина $n^2 a^3 = f(m_1 + m_2)$ остается конечной. То есть точка M_2 находится очень далеко от точек M и M_1 , но все же влияет на движение точки M благодаря своей большой массе. Результаты, полученные при изучении задачи Хилла, легли в основу созданной Э. Брауном теории движения Луны.

В заключение рассмотрения ограниченной задачи трех тел укажем, что в произвольной ограниченной задаче трех тел уравнения движения можно привести к виду (6.10), если перейти от координат x, y, z к новым координатам ξ, η, ζ , где

$$x = \frac{r}{p} \xi, \quad y = \frac{r}{p} \eta, \quad z = \frac{r}{p} \zeta, \quad (6.45)$$

а p – фокальный параметр относительного кеплеровского движения тяжелых точек $M_{1,2}$.

Тогда уравнения ограниченной задачи трех тел приобретут следующий вид (это так называемые *уравнения Нехвила*):

$$\begin{aligned} \xi'' &= 2\eta + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi}, \\ \eta'' &= -2\xi' + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta}, \\ \zeta'' &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial \zeta}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

где потенциал

$$\bar{U} = \frac{r}{p} \left[\frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2} e \zeta^2 \cos v + p^3 \left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2} \right) \right], \quad (6.47)$$

\cdot означает производную по истинной аномалии v .

Понятие линий и поверхностей Хилла используются для исследования движения и в других задачах небесной механики.

6.3. Неограниченная задача трех тел. Термин “ограниченная задача” применяется не только к задаче трех тел, а и к любой задаче о движении точки настолько малой массы, что она совсем не влияет на движение тел, под действием которых она сама движется. И, наоборот, задачи, в которых не накладывается никаких ограничений на массы взаимодействующих материальных точек и тел, называются “неограниченными задачами”. Наиболее известной и исследованной из них является *неограниченная задача трех тел*. Ее уравнения в инерциальной системе координат были приведены в начале этой главы – уравнения (6.1). Как уже указывалось, и в неограниченной задаче трех тел существуют пять частных лагранжевых решений – точек либрации. Поэтому возникают задачи исследования устойчивости этих решений, а также устойчивости и периодичности решений, близких к лагранжевым [18, 36].

Неограниченная задача трех тел стала первым случаем задачи многих тел, который был точно проинтегрирован с помощью степенных рядов. Это было сделано в 1912 г. финским математиком К. Зундманом. Приведем без доказательства (которое можно найти в [18]) основной результат исследования Зундмана. Он содержится в такой *теореме Зундмана*:

Если в задаче трех тел постоянная интеграла моментов $c \neq 0$, то по начальным условиям можно найти две такие положительные постоянные l и Ω , что координаты точек, взаимные расстояния между ними и время будут разлагаться в ряды (ряды Зундмана) по целым положительным степеням некоторой переменной τ . Эти ряды будут абсолютно сходящимися при всех $|\tau| < 1$ и определять движение в задаче трех тел для всех значений времени t .

Для того, чтобы привести формулы для вычисления постоянных l и Ω и переменной τ , нужно сделать дифференциальную замену времени t на новую переменную ω , а именно:

$$dt = \Gamma d\omega, \quad \Gamma = \prod_{k=0}^2 \left(1 - \exp \left(-\frac{R_k}{l} \right) \right). \quad (6.48)$$

Смысл этой замены состоит, как и в преобразовании Тиле, в том, чтобы иметь возможность описывать процесс столкновения точек при их движении. Но на этот раз имеется в виду, что после столкновения движение продолжается с новыми начальными условиями, которые вычисляются по начальным условиям до столкновения. Постоянная l определяется следующим образом:

$$l = \frac{1}{3} \sqrt{m_0} \frac{c_1^2 R^{(0)}}{(R^{(0)} \dot{R}^{(0)})^2 + c_1^2}, \quad (6.49)$$

где m_0 – наименьшая из масс трех точек, $R^{(0)}, \dot{R}^{(0)}$ – это начальные значения величины

$$R = \sqrt{\frac{\Delta_{12}^2}{m_0} + \frac{\Delta_{02}^2}{m_1} + \frac{\Delta_{01}^2}{m_2}} \quad (6.50)$$

и ее производной по времени, Δ_{ij} и m_k – расстояния между точками системы и их массы, $m = m_0 + m_1 + m_2$, а величина

$$c_1 = \frac{m_0 m_1 m_2}{m} c. \quad (6.51)$$

Постоянная

$$\Omega = \frac{l_1 \sqrt{\frac{3l_1}{\mu}}}{\frac{15}{8} \frac{m}{m_0} + \frac{3G^2 l_1}{2\mu_0} + \frac{9G\sqrt{\mu l_1}}{2\mu_0} + \frac{3}{4f} l_1 |K| + 224 \sqrt{\frac{16m}{m_0} + \frac{3l_1}{f} |K|}}, \quad (6.52)$$

где $l_1 = \frac{2}{29} l$, $\mu = fm$ – гравитационная постоянная задачи, а $\mu_0 = fm_0$ – гравитационная постоянная точки наименшей массы. Вспомогательная постоянная

$$G = \frac{1}{14l_1} \sqrt{\frac{9c^2}{2m_0^2} + \left(775 + \frac{3m}{m_0} \right) \left(\frac{1}{29} + \frac{m}{4m_0} + \frac{l_1}{16f} |K| \right) \mu l_1}, \quad (6.53)$$

а величина

$$K = -\frac{m}{m_0 + m_1 + m_2} h, \quad (6.54)$$

где h – постоянная интеграла энергии.

Наконец, переменная τ определяется следующим образом:

$$\tau = th \left(\frac{\pi \omega}{4\Omega} \right). \quad (6.55)$$

Результат весьма громоздкий. Так сколько же усилий нужно было приложить для его получения. Это результат самим же Зундманом был обобщен на произвольную задачу многих тел. Однако практического применения ряды Зундмана, к сожалению, не нашли, ибо они оказались сходящимися черезвычайно медленно. Подсчитано, что для достижения приемлемой точности при вычислении координат необходимо пресуммировать около 10^{800000} членов рядов. И все же принципиальное значение результатов Зундмана велико, они стимулировали дальнейшее аналитическое изучение задач трех и многих тел.

И в заключение об одном интересном частном случае неограниченной задачи трех тел – так называемой *пифагорейской* задаче трех тел (см. [16]). В этой задаче исследуется движение материальных точек с равными массами 5, 4 и 3, расположенных в начальный момент времени в вершинах прямоугольного треугольника со сторонами, длины которых также равны 5, 4

и 3, и начинающих свое движение с нулевой начальной скоростью. Компьютерное моделирование этой задачи показало, что с течением времени система стремится к следующей конфигурации – две более тяжелые точки движутся относительно их центра масс по эллиптическим орбитам с полуосами $a_{1,2} < 1$, а самая легкая точка удаляется от них, причем центр масс первых двух точек и третья точка движутся по некоторой прямой. Этот результат может иметь отношение к проблеме эволюции тройных звездных систем и вопросу об образовании тесных двойных систем.

Задачи к главе VI

6.1. Получить в квадратурах решение так называемой копенгагенской задачи – круговой ограниченной задачи трех тел с $\mu=1/2$ и начальными условиями:

$$x_0 = \dot{x}_0 = y_0 = \dot{y}_0 = z_0 = \dot{z}_0 = 0, \text{ а } z_0 \neq 0.$$

6.2. Обосновать выводы об устойчивости точек либрации в линейном приближении.

6.3. Выяснить, будет ли движение указанных малых планет с учетом возмущений от Юпитера всегда финитным:

а) Гильда: $\Omega = 228^\circ, \omega = 49^\circ, i = 8^\circ, e = 0.153, a = 3.975$;

б) Ева: $\Omega = 77^\circ, \omega = 283^\circ, i = 24^\circ, e = 0.345, a = 2.824$.

6.4. Показать, что движение в эллиптической ограниченной задаче трех тел удовлетворяет системе уравнений (6.46).

6.5. Доказать, что прямолинейные точки либрации неустойчивы в эллиптической задаче трех тел при достаточно малом значении эксцентриситета орбит тяжелых точек.

6.6. Доказать, что в неограниченной задаче трех тел постоянная конфигурация, имеющая вид равностороннего треугольника, сохраняется неизменной, если расстояния до центра масс системы r_i удовлетворяют таким равенствам:

$$\frac{r_1}{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}} = \frac{r_2}{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2}} = \frac{r_3}{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}.$$

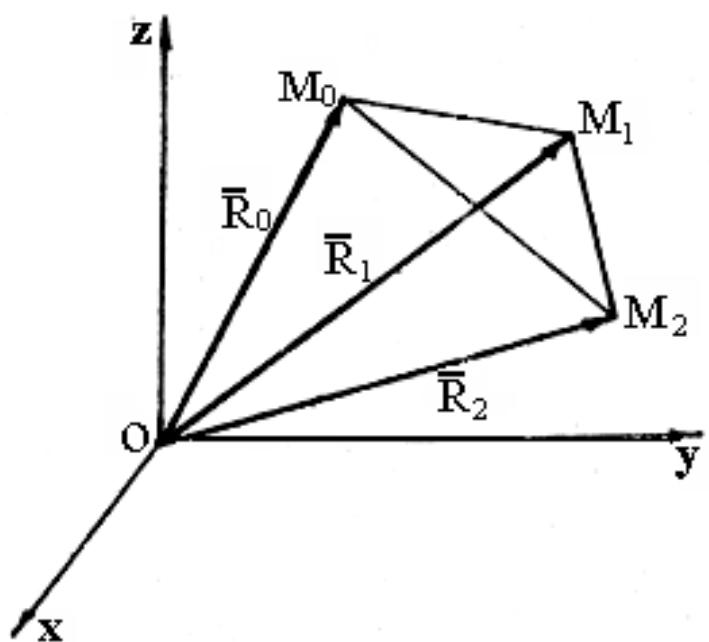


Рис. 6.1. Задача трёх тел в инерциальной системе координат

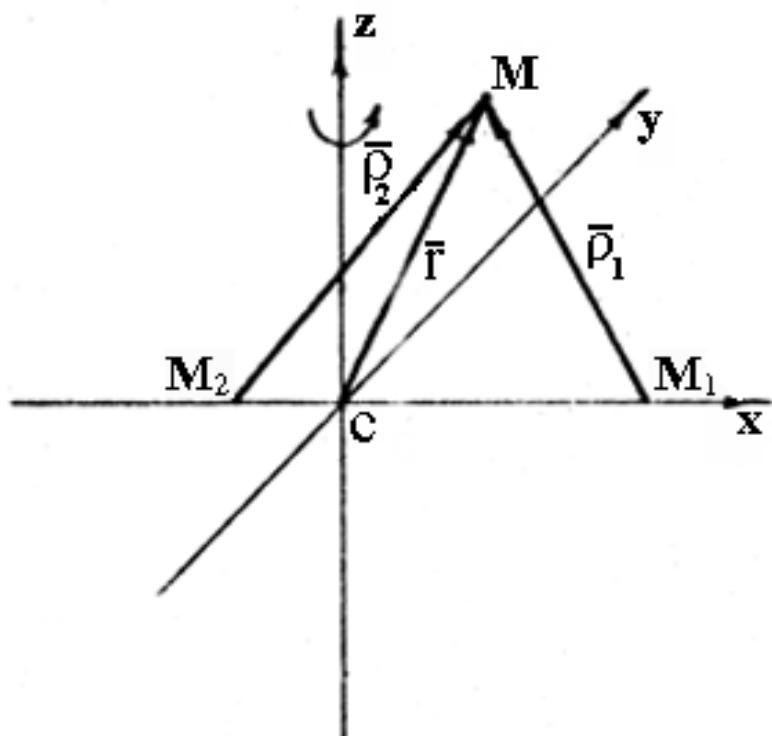


Рис. 6.2. Ограниченная круговая задача трёх тел

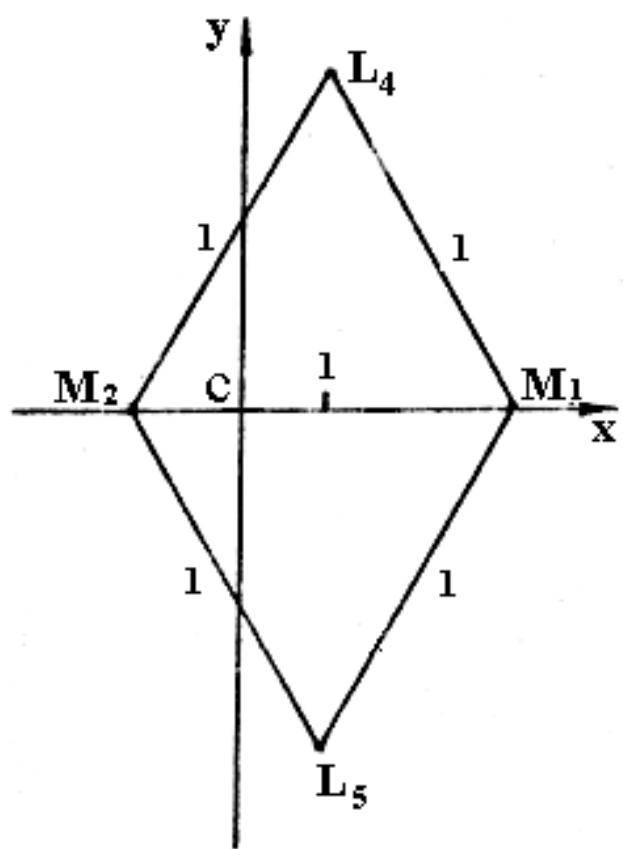


Рис. 6.3. Треугольные точки либрации

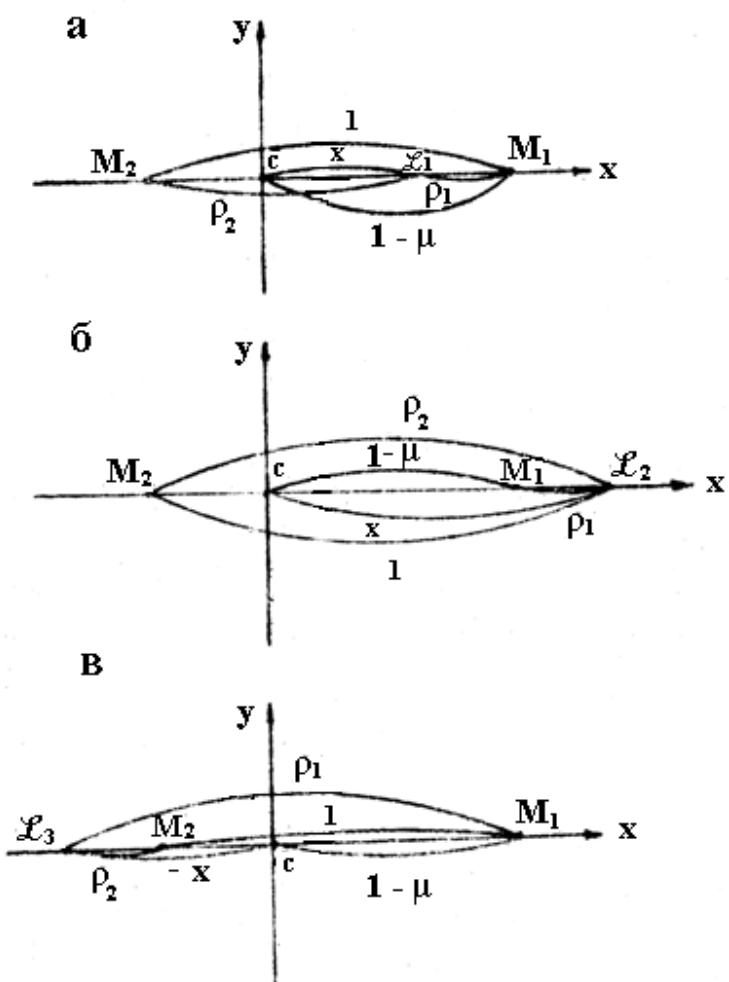


Рис. 6.4. Прямолинейные точки либрации

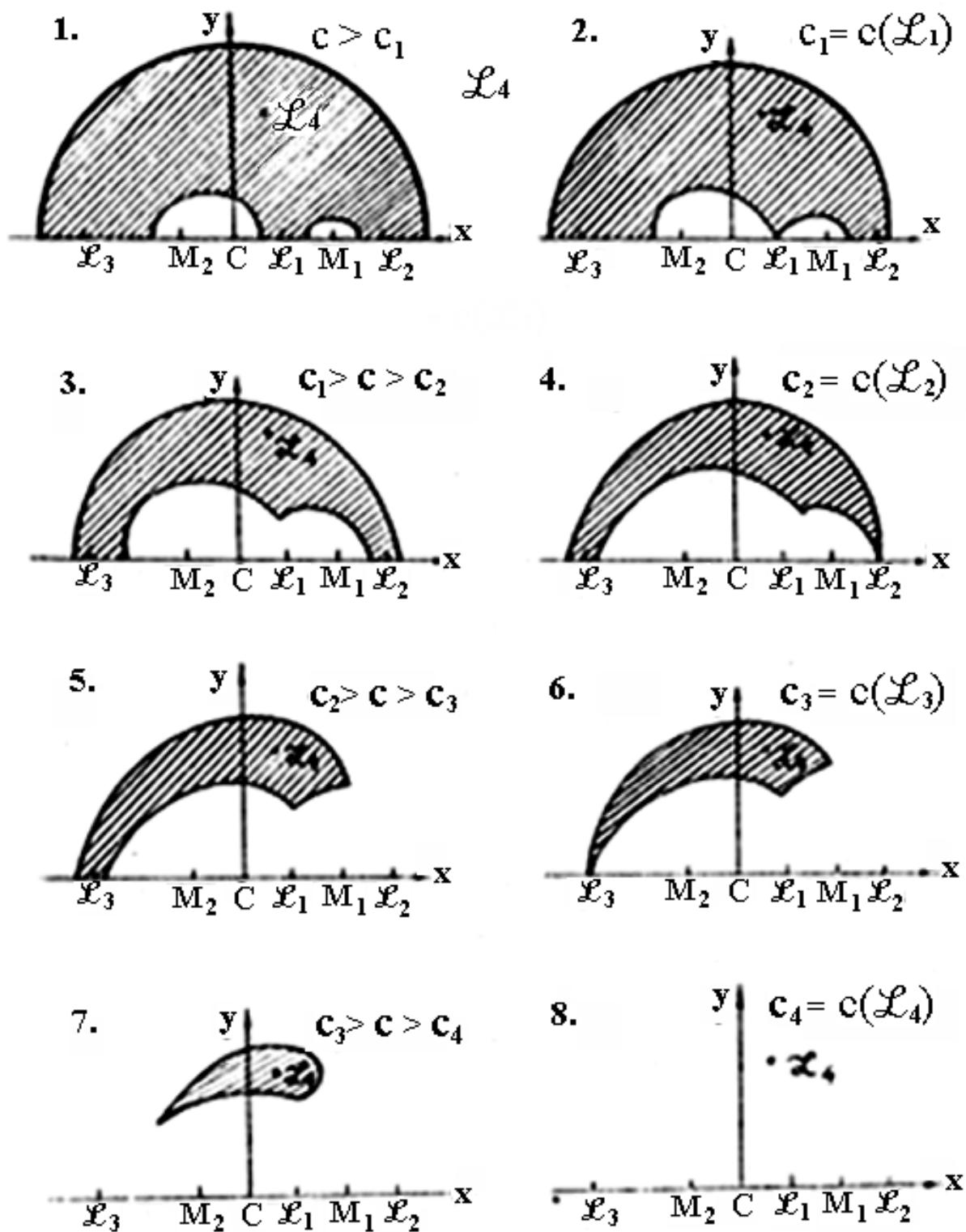


Рис. 6.5. Линии Хилла ограниченной плоской круговой задачи трёх тел при различных значениях постоянной интеграла Якоби

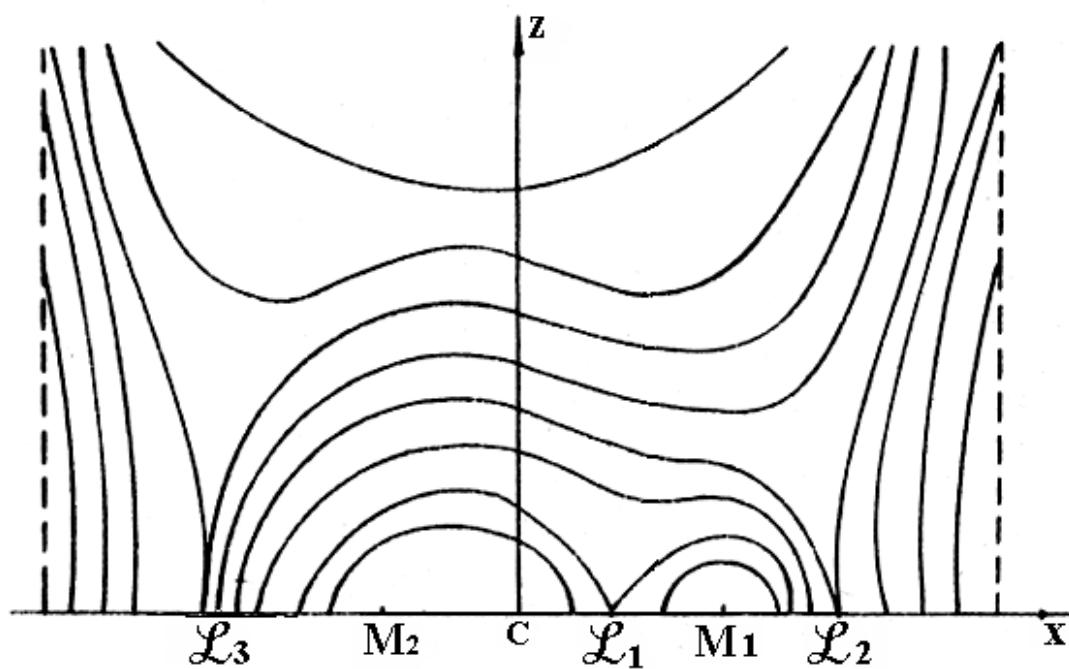


Рис. 6.6. Сечения поверхностей Хилла плоскостью X - Y в пространственной ограниченной круговой задаче трёх тел

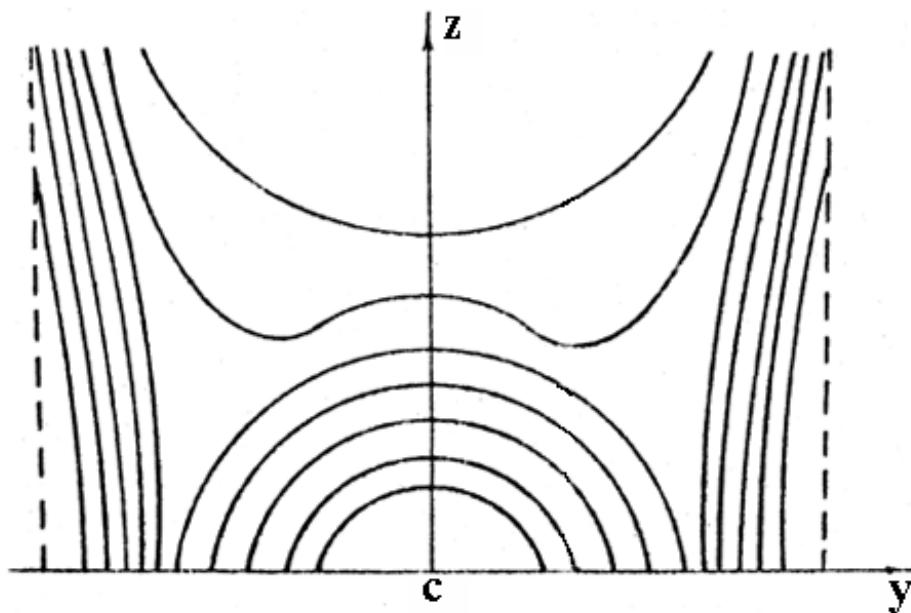


Рис. 6.6. Сечения поверхностей Хилла плоскостью X - Y в пространственной ограниченной круговой задаче трёх тел

Глава VII. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

В четвертой главе были изложены общие основы изучения возмущенного движения в небесной механике – метод оскулирующих элементов и метод осреднения. Ниже делается обзор методов, с помощью которых строятся теории движения больших и малых планет и других тел Солнечной системы (хотя надо иметь в виду, что ряд этих методов сохраняет сегодня уже чисто историческое значение). Несколько более подробно будут рассмотрены метод Лагранжа, основанный на разложении в ряд возмущающей функции, и связанное с ним понятие о собственных элементах орбиты. Изложены также основы теории движения Луны.

7.1. Обзор методов в теориях движения тел Солнечной системы

7.1.1. Численные методы. При рассмотрении движения какого-либо конкретного тела, для которого известны из наблюдений численные значения начальных условий и параметров, описывающих возмущающие силы, естественно обратиться к тому или иному методу численного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения. Как подчеркивалось в четвертой главе, медленность изменения оскулирующих элементов по сравнению с координатами делает более целесообразным численное интегрирование уравнений движения именно в оскулирующих элементах. Но сложность вычисления правых частей этих уравнений по сравнению с уравнениями в координатах приводит к тому, что численное интегрирование последних также применяется, особенно при вычислении эфемерид, то есть тогда, когда нужны значения координат на относительно небольшом промежутке времени.

Есть два подхода к интегрированию уравнений движения в координатах. Первый, который получил название *метода Коуэлла*, состоит в том, что тот или иной метод численного интегрирования применяется непосредственно к самим уравнениям движения. При другом подходе, который связывается с именем Энке (*метод Энке*), составляются и интегрируются уравнения для отклонений координат от их значений в задаче двух тел (точнее говоря, вычисленных по оскулирующим элементам в начальный момент t_0). В первом случае более простым является вычисление правых частей уравнений. Во втором – правые части более сложны, и нужен дополнительный этап – вычислений начальных значений координат. Но изменяются вариации координат значительно медленнее нежели сами координаты, поэтому уравнения для них удобнее для численного интегрирования. Однако эти вариации, то есть отклонения возмущенных координат от невозмущенных, вообще говоря, со временем увеличиваются. Это заставляет переходить от оскулирующих элементов в момент t_0 , как начальных, к элементам в некоторый новый момент t_1 и так далее. Это также усложняет вычисления по схеме Энке. Поэтому однозначного ответа на вопрос о том, какой же метод – Коуэлла или Энке более целесообразен,

нельзя дать. Этот вопрос приходится решать в каждом конкретном случае отдельно.

Переходя к вопросу о выборе конкретного способа численного интегрирования уравнений движения, напомним, что они делятся на одношаговые и многошаговые. В одношаговых методах для нахождения последующих значений решения системы уравнений используется лишь одно предыдущее его значение. Такими являются метод Эйлера – самый простой по идеи и по реализации, но и наименее точный, и известный метод Рунге–Кутта. В последнем для повышения его точности дополнительно вычисляются значения искомых функций еще и в некоторых точках на промежутке (t_k, t_k+h) , где h – шаг интегрирования. Многошаговые методы основаны на приближенном нахождении производных нескольких первых порядков от искомых функций с помощью конечных разностей по некоторым предыдущим значениям этих функций. А затем используется ряд Тейлора с соответствующим числом его членов. Примером такого метода может служить *метод Адамса*, который он использовал при вычислении координат Нептуна по его возмущающему влиянию на движение Урана. В методе Адамса последующее (пятое) значение решения находится по четырем предыдущим:

$$x_5 = x_1 + \frac{1}{2} \Delta_{7/2}^1 + \frac{5}{12} \Delta_3^2 + \frac{3}{8} \Delta_{5/2}^2 + \frac{251}{720} \Delta_4^2. \quad (7.1)$$

Позднее Штермер модифицировал метод Адамса так, чтобы он был применим непосредственно для систем уравнений второго порядка и не было нужды сводить их к системам первого порядка. Коуэлл, исследуя движение VIII спутника Юпитера, предложил способ численного интегрирования, имеющий более высокую точность, нежели метод Адамса. В *методе Коуэлла*

$$x_5 = x_4 + \frac{1}{2} (\Delta_{9/2} + \Delta_{7/2}) + \frac{1}{6} \Delta_3^2 - \frac{1}{24} (\Delta_{7/2}^3 + \Delta_{5/2}^3) - \frac{1}{720} \Delta_4^4. \quad (7.2)$$

Достигается повышение точности за счет допущения, что четвертые разности являются уже постоянными, и вычисления разностей в следующей точке от четвертой к первой.

Важным моментом при численном интегрировании является оптимальный выбор шага интегрирования и, в частности, его изменение в соответствии со скоростью изменения искомых величин. При этом очевидно, что такое изменение шага интегрирования значительно проще при применении одношаговых методов, нежели многошаговых.

При интегрировании уравнений движения тел Солнечной системы, как правило, встает одна из двух возможных задач. Первая из этих задач – найти достаточно точные координаты тела для нахождения его эфемерид на относительно небольшом отрезке времени (порядка одного его оборота). Другая задача возникает при исследовании динамической истории Солнечной системы или какой-либо ее части, когда нужно приближенно проинтегрировать уравнения движения на максимально возможном

промежутке времени. В первом случае бывает целесообразнее интегрировать уравнения движения в координатах, во втором – в оскулирующих элементах или эволюционные уравнения, описывающие лишь вековые возмущения элементов орбиты.

7.1.2. Аналитические методы. Аналитические методы приближенного интегрирования, возникшие при построении теорий движения различных тел Солнечной системы, также ориентированы на решение одной из тех двух задач, речь о которых шла в конце предыдущего подраздела.

Остановимся сначала на методах нахождения вековых возмущений. *Метод Гаусса* – это метод осреднения, рассмотренный в общем виде в четвертой главе. Примененному к *двухпланетной задаче* (возмущение движения планеты m планетой m'), ему можно дать такую физическую интерпретацию. Осереднение правых частей уравнений для оскулирующих элементов по средней аномалии возмущающей планеты приводит к тому, что в эти уравнения вместо компонент возмущающей силы подставляются производные по направлениям S, T, W от потенциала так называемого гауссового кольца

$$V = \int \frac{dm'}{\Delta}, \quad (7.3)$$

где Δ – расстояние между планетами, а dm' – масса элемента эллиптического кольца, образованного распределением массы возмущающей планеты вдоль ее орбиты с плотностью, пропорциональной площади элементарного фокального сектора. Как показал Гаусс, потенциал V может быть вычислен с помощью эллиптических интегралов. Интеграл осреднения по средней аномалии возмущаемой планеты находится его численным интегрированием. Трудности, возникающие при практической соизмеримости средних движений возмущаемой и возмущающей планет, могут быть преодолены с помощью метода, предложенного Н. Н. Боголюбовым.

Метод Лагранжа для нахождения вековых возмущений оскулирующих элементов, основанный на разложении в ряд возмущающей функции, будет рассмотрен в следующем подразделе.

Первым методом, предложенным для получения возмущенных координат планет, был *метод Лапласа*, модифицированный позднее С. Ньюкомбом. В этом методе составляются и приближенно интегрируются уравнения для логарифма гелиоцентрического расстояния планеты и ее эклиптической широты в оскулирующей орбите и уравнения для элементов Ω и i , определяющих положение этой оскулирующей орбиты. При этом приближения решений этих уравнений строятся по степеням отношения массы возмущающей планеты к массе Солнца.

Метод Ганзена в целом аналогичен методу Лапласа, но в нем ищутся возмущения сферических координат в некоторой специальной системе координат, которая получила название системы *идеальных координат Ганзена*. Эта система координат получается из эклиптической поворотом

координатных осей с помощью матрицы поворота A , на которую налагаются такие условия:

$$\frac{dA}{dt} \cdot \vec{r} = 0, \quad z = 0. \quad (7.4)$$

Система координат Ганзена подвижна. Но в ней имеет место такая же связь между координатами и оскулирующими элементами, что и в неподвижных системах.

Еще один метод – *метод Хилла* – основан на полученных им точных уравнениях для возмущений сферических координат планеты и их интегрировании методом последовательных приближений.

Наконец, *метод*, предложенный *Делоне*, требует использования канонических оскулирующих элементов Делоне (см. пункт 5.2.2). Основная идея метода Делоне состоит в том, что после разложения правых частей уравнений для этих элементов в ряды Фурье делаются последовательно такие их канонические преобразования, чтобы исключить из этих рядов свободные члены и члены с наибольшими амплитудами.

Для более подробного знакомства с упомянутыми и некоторыми другими методами интегрирования уравнений возмущенного движения больших планет можно обратиться к книгам [10, 39].

В заключение подчеркнем то, что при построении теории возмущенного движения существенным образом используется наличие малых параметров – масс планет (в гауссовой системе единиц), эксцентриситетов и относительных наклонений их орбит. В частности, вводится малый параметр, $\sigma = \sin^2(J/2)$, где J – относительное наклонение орбит возмущающей и возмущаемой планет. По всем этим малым величинам могут быть построены степенные ряды для коэффициентов Фурье правых частей уравнений возмущенного движения. Тогда при интегрировании этих уравнений методом последовательных приближений получим, что некоторый элемент орбиты возмущаемой планеты будет иметь такой вид:

$$E = E^0 + \sum_k \delta_k E, \quad (7.5)$$

где k -тое возмущение этого элемента будет суммой членов такой структуры:

$$AM \frac{t^p \cos[(s, n) + \alpha]}{\prod_j (s_j, n)^{k_j}}, \quad (7.6)$$

где множитель A пропорционален произведению неотрицательных степеней возмущающих масс, при этом сумма показателей равна k . Это число k определяет *порядок возмущения*. Множитель M есть одночлен неотрицательных степеней эксцентриситетов и величин σ . Сумма показателей этого одночлена называется *степенью возмущения*. Величины

$$(s, n) = \sum_i s^{(i)} n_i, \quad (s_j, n) = \sum_i s_j^{(i)} n_i, \quad (7.7)$$

где l – количество планет, s, s_j – целые числа, p, k_j – неотрицательные целые числа. Произведение, стоящее в знаменателе (7.6), возникает при последовательном интегрировании по методу итераций. Разность $k-p$ называется *рангом возмущения*, а величина $k-q/2-p/2$, где $q = \Sigma k_j$, его *классом*. Смысл введения этих понятий состоит в том, что при определенных условиях, налагаемых на числа s и s_j , можно найти условия, которым удовлетворяют ранг и класс возмущения. В частности, это определяется соответствующими теоремами Пуанкаре о ранге и классе возмущений (подробнее см. о этом в [32, 39]). Из этих теорем вытекают и известные теоремы Лапласа и Пуассона об отсутствии вековых возмущений больших полуосей в многопланетной задаче в первом и втором приближениях.

7.2. Вековые возмущения в движении планет. Метод Лагранжа

7.2.1. Разложение возмущающей функции. Если возмущенное движение описывается относительной задачей многих тел, то существует возмущающая функция для каждой планеты, которая имеет вид (1.57). Рассмотрим сначала задачу трех тел (двухпланетную задачу). В этом случае возмущающая функция

$$R = fm \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r^2} \right), \quad (7.8)$$

где расстояние между планетами

$$\Delta = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H)^{1/2}, \quad (7.9)$$

H – угол между радиусами-векторами возмущаемой планеты \vec{r} и возмущающей – \vec{r}' . Первое слагаемое в (7.8) называется *главной частью* возмущающей функции, второе – ее дополнительным или вторым членом. Важно то, что второй член после разложения его в двойной ряд Фурье по средним аномалиям M и M' не содержит свободного члена, ибо интегралы типа

$$\oint xr^{-3} dM \quad (7.10)$$

в силу уравнений невозмущенного движения равны нулю. Поэтому, если нас интересуют лишь вековые возмущения, то достаточно иметь дело только с главной частью (7.8), то есть с величиной Δ^{-1} . Задача состоит в том, чтобы найти разложение этой величины в ряд Фурье по угловым переменным $\Omega, \pi, M, \Omega', \pi', M'$ и степенные ряды по степеням эксцентриситетов e и e' и величины σ . При этом коэффициенты такого ряда будут функциями лишь больших полуосей a и a' .

Если обозначить (см. рис. 7.1) через Π и Π' долготы перигелиев планетных орбит, а через L и L' – долготы самих планет, отсчитываемые от точки пересечения орбит (на гелиоцентрической небесной сфере), то будем иметь:

$$\cos H = \cos L \cos L' + \sin L \sin L' \cos J = \cos(L - L') - 2\nu \sin J, \quad (7.11)$$

где $\nu = \sin^2(J/2)$.

Тогда

$$\Delta^{-1} = \Delta_0^{-1} (1 + \beta)^{-1/2}, \quad (7.12)$$

где расстояние между планетами на компланарных орбитах

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(L - L'))^{1/2}, \\ \beta &= 4\nu \sin L \sin L' rr'/\Delta_0^2 \leq 4\nu rr'/(r - r')^2. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Разложение выражения (7.12) в ряд по степеням β (а тем самым и ν) и выражения для Δ_0 в ряд Фурье по углу $S = L - L'$ и лежит в основе разложения в ряд главной части возмущающей функции. При этом важную роль играют величины, называемые *коэффициентами Ньюкомба*

$$c_n^i = \alpha^{(n-1)/2} b_n^i, \quad b_n^i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos S)^{-n/2} \cos iS dS, \quad \alpha = a/a' < 1. \quad (7.14)$$

Заметим, что условие $\alpha < 1$ не налагает ограничений на значения полуосей a и a' , ибо расстояние Δ симметрично зависит от r и r' . Интегралы b_n^i имеют название *коэффициентов Лапласа* и равны в общем случае:

$$b_n^i = \frac{2(n/2, i)}{(1, i)} F(n/2 + n/2 + i, i + 1, \alpha^2), \quad (7.15)$$

где F – гипергеометрическая функция, а $(k, i) = k(k-1)\dots(k+i-1)$. Нужные нам в дальнейшем первые коэффициенты Лапласа

$$b_1^0 = \frac{4}{\pi} F(\alpha), \quad b_1^1 = \frac{4}{\pi\alpha} (F(\alpha) - E(\alpha)), \quad (7.16)$$

где F и E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

После получения рядов по степеням ν их коэффициенты, зависящие от r и r' , разлагаются в ряды по степеням эксцентриситетов e и e' с помощью ряда (3.28). Величины $\cos iS$ с помощью уравнения центра (3.46) разлагаются в ряды Фурье по средним аномалиям M и M' . Конечный результат имеет такой вид:

$$R = \sum e^n e^{n'} P_{j, j'}^{(s, s')} \nu^k \cos(s\Pi + s'\Pi' + jM + j'M'), \quad (7.17)$$

где n, n' и k – целые неотрицательные числа, а s, s', j и j' – целые числа, но в каждом члене ряда (7.17) сумма $n+n'+2k$ или равна $|j+j'|$, или превышает его на четное число. Коэффициенты $P_{j, j'}^{(s, s')}$ могут быть выражены через коэффициенты Лапласа с помощью так называемых операторов Ньюкомба. *Операторы Ньюкомба* являются некоторыми полиномами степени n от аргументов D и s , где оператор $D \equiv d/d(\ln \alpha)$. Коэффициенты Ньюкомба и Лапласа и их производные связаны рядом рекуррентных соотношений. В частности,

$$n^2 D^k c_{n+2}^i = D^k [D^2 + D - (i + (n-1)/2)(i + (n-3)/2)] c_n^{i-1}. \quad (7.18)$$

Подробнее задача разложения возмущающей функции в ряды рассмотрена в [10, 39]. Мы далее приведем лишь явный вид ряда для вековой часть возмущающей функции (точнее, для отношения a'/Δ). Удерживая члены второго порядка относительно малых величин e, e' и ν , будем иметь:

$$\frac{a}{\Delta} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{128} e^4 \right) c_1^0 + \left\{ \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) - \frac{1}{2} \nu^2 [1 + e^2 (2\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2)] \right\} c_3^1 + \quad (7.19)$$

$$+\frac{1}{4}ee'(2-2\alpha D_\alpha -\alpha^2 D_\alpha^2)c_1^0 \cos(\Pi-\Pi')+\frac{1}{16}e^2\nu^2(6+6\alpha D_\alpha +\alpha^2 D_\alpha^2)c_3^1 \cos 2(\Pi-\Pi'),$$

где $D_\alpha \equiv d/d\alpha$.

7.2.2. Собственные элементы орбит. Если малыми первого порядка являются величины e , e' и ν , то той же точностью будем иметь, учитывая (7.18), что вековая часть возмущающей функции после некоторых преобразований будет равна:

$$R = fm'\{M + N(e^2 + e'^2 - \sin^2 i - \sin^2 i' + 2 \sin i \sin i' \cos(\Omega - \Omega')) - 2Pee' \cos(\Pi - \Pi')\}, \quad (7.20)$$

где коэффициенты

$$M = b_1^0/a', \quad N = \frac{1}{4a'} \left(\alpha \frac{db_1^0}{d\alpha} + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{d^2 b_1^0}{d\alpha^2} \right), \quad P = \frac{1}{4a'} \left(b_1^1 - \alpha \frac{db_1^1}{d\alpha} - \frac{1}{2} \frac{d^2 b_1^1}{d\alpha^2} \right), \quad (7.21)$$

а коэффициенты Лапласа определяются формулами (7.16). Если теперь перейти к многопланетной задаче (Солнце и n планет) и ввести новые элементы вместо кеплеровских:

$$h_a = e_a \sin \pi_a, k_a = e_a \cos \pi_a, p_a = \sin i_a \sin \Omega_a, q_a = \sin i_a \cos \Omega_a, a = 1, 2, \dots, n, \quad (7.22)$$

то (7.20) перепишется в виде:

$$\bar{R}_{ab} = fm'\{M_b + N_{ab}[h_a^2 + h_b^2 + k_a^2 + k_b^2 + p_a^2 - p_b^2 - q_a^2 - q_b^2 + 2(p_a p_b + q_a q_b)] - 2P_{ab}(h_a h_b + k_a k_b)\}. \quad (7.23)$$

Видим, что потенциал осредненной задачи в оскулирующих элементах h , k , p и q является квадратичной функцией этих элементов, то-есть для этих элементов мы имеем хорошо известную в механике задачу о линейных колебаниях системы с многими степенями свободы [25]. При этом уравнения движения распадаются на две независимые системы – одна для элементов h и k , другая – для элементов p и q . Эти системы можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{dh_a}{dt} &= (a, a)k_a - \sum_b [a, b]k_b, \\ \frac{dk_a}{dt} &= -(a, a)h_b + \sum_b [a, b]h_b \end{aligned} \quad (7.24)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{dp_a}{dt} &= -(a, a)q_a + \sum_b (a, b)q_b, \\ \frac{dq_a}{dt} &= (a, a)p_b - \sum_b (a, b)p_b, \end{aligned} \quad (7.25)$$

где введены обозначения:

$$(a, a) = \sum_b \frac{2fm_b}{n_a a_a^2} N_{ab}, \quad (a, b) = \frac{2fm_b}{n_a a_a^2} N_{ab}, \quad [a, b] = \frac{2fm_b}{n_a a_a^2} P_{ab}. \quad (7.26)$$

Величины N_{ab} и P_{ab} обобщают (7.21); m , a и n – массы планет, большие полуоси их орбит и их средние движения. Решение каждой из этих систем уравнений можно искать в следующем виде:

$$h_a = \sum_b M_{ba}^{(a)} \sin(g_b t + \beta_b), \quad k_a = \sum_b M_{ab}^{(a)} \cos(g_b t + \beta_b) \quad (7.27)$$

и

$$p_a = \sum_b N_{ba}^{(a)} \sin(f_b t + \gamma_b), \quad q_a = \sum_b N_{ba}^{(a)} \cos(f_b t + \gamma_b). \quad (7.28)$$

Частоты g_b – это корни характеристического уравнения

$$\|A_{ab} - g\delta_{ab}\| = 0, \quad (7.29)$$

где

$$A_{ab} = -\frac{a_a \sqrt{m_a n_a}}{a_b \sqrt{m_b n_b}} [a, b],$$

а частоты f_b находятся из уравнения

$$\|B_{ab} - f\delta_{ab}\| = 0, \quad (7.30)$$

где

$$B_{ab} = -\frac{a_a \sqrt{m_a n_a}}{a_b \sqrt{m_b n_b}} (a, b).$$

Амплитуды $M_{ab}^{(a)}$ та $N_{ab}^{(a)}$ и начальные фазы β_b и γ_b вместе с полуосами a_a являются постоянными интегрирования задачи, они получили название *собственных элементов орбиты*. Знание амплитуд позволяет найти пределы, в которых изменяются вековые значения эксцентриситетов и наклонений планетных орбит с периодами, соответствующими найденным частотам, а если известны и начальные фазы, то можно вычислить и сами значения элементов e и i в заданную эпоху. Значения собственных элементов для восьми больших планет (кроме Плутона) можно найти в [38]. В частности, эксцентриситет земной орбиты изменяется с периодом в 24 тыс. лет, что может оказывать влияние на климат Земли. Плутон в эту схему не вписывается, ибо для пары Нептун – Плутон значение β в (7.13) не является малым и соответствующий ряд сходится очень медленно.

Рассмотрим теперь ограниченную задачу 10 тел – Солнце, восемь больших планет и тело пренебрежимо малой массы с достаточно малыми значениями эксцентриситета и наклонения орбиты (малая планета, короткопериодическая комета, крупное метеорное тело). В этом случае полная система уравнений задачи распадается на системы (7.18) и (7.19) для больших планет и системы уравнений для собственных элементов h и k и p и q для тела пренебрежимо малой массы:

$$\frac{dh}{dt} = k \sum_b (0, b) - \sum_b k_b [0, b], \quad \frac{dk}{dt} = -h \sum_b (0, b) + \sum_b h_b (0, b) \quad (7.31)$$

и аналогичную систему для элементов p и q . Подставляя в (7.31) значения h_b и k_b из (7.27), будем иметь:

$$\frac{dh}{dt} = gk - \sum_b B_b \cos(g_b t + \beta_b), \quad \frac{dk}{dt} = -gh + \sum_b B_b \sin(g_b t + \beta_b), \quad (7.32)$$

где $g = \sum_b (0, b)$. Таким образом, величины h и k колеблются с собственной

частотой g и вынужденными частотами g_b , то есть

$$h = e \sin \pi = B \sin(gt + \beta) + \sum_b \frac{B_b}{g - g_b} \sin(g_b t + \beta_b),$$

$$k = e \cos \pi = B \cos(gt + \beta) + \sum_b \frac{B_b}{g - g_b} \cos(g_b t + \beta_b). \quad (7.33)$$

Аналогично для элементов p и q будем иметь:

$$p = \sin i \sin \Omega = C \sin(-gt + \gamma) + \sum_b \frac{C_b}{g + f_b} \sin(f_b t + \gamma_b),$$

$$q = \sin i \cos \Omega = C \cos(-gt + \gamma) + \sum_b \frac{C_b}{g + f_b} \cos(f_b t + \gamma_b). \quad (7.34)$$

Постоянные интегрирования B , C , β и γ вместе с большой полуосью a , у которой также отсутствуют вековые возмущения, – это *собственные элементы* соответствующего малого тела Солнечной системы. Они полезны при рассмотрении движения этого тела на достаточно больших промежутках времени – частоты g и f соответствуют периодам в десятки и сотни тысяч лет. Близость собственных элементов малых планет служит основанием для объединения их в группы (*семейства Хираймы*), в которых астероиды, по-видимому, имеют общее происхождение. Однако нужно помнить, что для применения понятия о собственных элементах нужны не только малые значения эксцентриситетов и наклонений, но, кроме того недопустима близость большой полуоси тела a к большой полуоси какой-либо из больших планет, ибо тогда параметр α стремится к 1, а эллиптический интеграл первого рода, а вместе с ним и коэффициенты Лапласа расходятся. Этот квазирезонансный случай сейчас активно исследуется в небесной механике. Более подробно метод Лагранжа рассмотрен в книгах [10, 39].

7.3. Основы теории движения Луны

Теория движения Луны занимает особое место во всей истории небесной механики. С одной стороны это определяется большим прикладным значением задачи. До создания в 1781 г. Харрисоном морского хронометра сопоставление наблюдаемых и расчетных положений Луны было основным способом определения долгот в мореплавании. Важную роль в изучении Луны и решении других задач астрономии имеют наблюдения покрытий звезд Луной, для чего также необходимы ее точные координаты. В частности, при проведении таких наблюдений с достаточно большим временным разрешением можно определять диаметры звезд по возникающей при этом дифракционной картине. Потребная точность вычисления эфемерид Луны возрастала с увеличением точности ее позиционных наблюдений. Сейчас светолокационные методы дают возможность определять расстояние до Луны с точностью, меньшей 10 см. Практическое значение теории движения Луны в настоящее время связано также с ее изучением и будущим освоением средствами ракетно-космической техники. После изучения Луны автоматическими станциями и первых кратковременных пилотируемых полетов к ней космонавтика вплотную подошла к следующему этапу – созданию постоянной научно-исследовательской базы на поверхности Луны.

Задача о движении Луны принадлежит к так называемым спутниковым задачам, но имеет свои особенности, делающие ее более сложной, нежели задачи о движении других естественных спутников планет. Это связано с

тем, что, во-первых, Земля ближайшая к Солнцу из планет, которые имеют спутники, и, во-вторых, с тем, что масса Земли наименьшая из масс планет, имеющих спутники, достаточно удаленные от своей планеты. Это обуславливает относительно большое возмущающее влияние Солнца на движение Луны. Интересно заметить, что Солнце притягивает Луну с силой, которая в два раза большей силы, с которой Земля притягивает Луну, но на движение Луны вокруг Земли влияет лишь разность сил, с которыми Солнце действует на Луну и Землю, а эта разность значительно меньше. Практическое значение и теоретическая сложность лунной задачи привели к тому, что как раз решая ее, целая плеяда выдающихся ученых сделала основополагающий вклад в развитие небесной механики в целом. Это – И. Ньютона, Л. Эйлер, А. Клеро, Ж. Даламбер, П. Лаплас, П. Ганзен, Ш. Делоне, Д. Хилл и многие другие.

На движение Луны относительно центра Земли влияет много факторов. Они указаны в табл. 7.1. Там же приведены составляющие вековых возмущений долгот перигея и узла лунной орбиты, обусловленные каждым из этих факторов. Видно, что определяющую роль играют возмущения от Солнца в пределах эллиптической задачи трех тел. Поэтому решение этой задачи получило название *основной проблемы теории движения Луны* (или *солнечной теории движения Луны*).

Рассмотрим главные этапы решения основной проблемы теории движения Луны, основы которого были заложены Д. Хиллом. А потом эту теорию развивали Э. Браун, У. Эккерт и другие.

Таблица 7.1
Вековые возмущения орбиты Луны

Вековое движение в "/год	перигея орбиты	узла орбиты
1. Основное действие Солнца	$1.46 \cdot 10^5$	$-0.70 \cdot 10^5$
2. Отклонения от основного действия в пределах задачи трех тел	-0.68	0.89
3. Действие планет на Луну и Землю	2.70	-1.40
4. Действие планет на Солнце	-0.16	0.05
5. Несферичность Земли	6.40	-6.00
6. Несферичность Луны	0.03	-0.14
7. Релятивистская поправка	0.02	0.02

Задача решается в относительных *координатах Якоби*, то есть движение Луны (точка M на рис. 7.1) рассматривается относительно Земли (точки E), а движение Солнца (точка S) – относительно центра масс системы «Земля – Луна» (точки G). Массы точек обозначим также как M , E и S . Тогда уравнения движения (см. задачу 1.10):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + f(E+M)\frac{\vec{r}}{r^3} = f\frac{S(E+M)}{EM} grad_r R, \quad \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = f\frac{S+E+M}{E+M} grad_\rho R, \quad (7.35)$$

где \vec{r} – геоцентрический радиус-вектор Луны, $\vec{\rho}$ – барицентрический радиус-вектор Солнца, возмущающая функция

$$R = \frac{fE}{r_{ES}} + \frac{fM}{r_{MS}}. \quad (7.36)$$

Разлагая обратные расстояния r_{ES} и r_{MS} в ряды по степеням отношения r/ρ , будем иметь, в частности, что

$$R = f(E + M) \frac{1}{\rho} + \frac{fME}{E + M} \frac{r^2}{\rho^3} + \dots \quad (7.37)$$

где отношение второго члена в (7.37) к первому $\approx 10^{-7}$, что и обуславливает большую точность приближения эллиптической задачи трех тел в решении проблемы движения Луны, ибо с указанной точностью имеем:

$$\frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} + f(S + E + M) \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} = 0, \quad (7.38)$$

и движение Солнца можно рассматривать как кеплеровское. Обозначим теперь среднее движение Солнца как n' , среднее движение Луны как n , а отношение среднего движения Солнца к синодическому среднему движению Луны как

$$m = \frac{n'}{n - n'}. \quad (7.39)$$

Величина $m = 0.0808$ играет важную роль в теории движения Луны – именно в виде степенных рядов по m и строится в дальнейшем эта теория.

Если ввести систему координат, врачающуюся в плоскости эклиптики с угловой скоростью n' и осью x , направленной на Солнце, то обобщение уравнения (6.7) можно привести к такому виду:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} = 2 \frac{d\vec{r}}{d\tau} \times \vec{k}^0 - \frac{k\vec{r}}{r^3} + (3\vec{i}^0 + \vec{k}^0)m^2 \vec{r} + \text{grad}\Omega, \quad (7.40)$$

где $k = (S + E)/(n - n')^2$, $\tau = (n - n')t$, а \vec{i}^0, \vec{k}^0 – орты координатных осей x и z ; Ω – некоторая функция координат Луны и Солнца. Потом, как первое приближение, решается плоская круговая задача трех тел, то есть эксцентриситет солнечной орбиты и наклонение лунной полагаются равными 0. Остается система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} + \left(\frac{k}{r^3} - 3m^2 \right) x &= 0, \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + \frac{ky}{r^3} &= 0. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Решение системы (7.41) в нулевом приближении ищется не виде кеплеровского эллипса, а в виде так называемой *вариационной кривой*. Это и есть то главное, что внес в теорию лунного движения Д. Хилл по сравнению со своими предшественниками. Вариационная кривая находится из условия, что она пересекает оси x и y под прямыми углами. Возможность такого решения системы (7.40) вытекает из ее инвариантности относительно преобразований $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $t \rightarrow -t$. Уравнения вариационной кривой оказываются такими:

$$x = a_0 \cos \tau \left[1 - m^2 \left(1 + \frac{3}{4} \sin^2 \tau \right) \right], \quad (7.42)$$

$$y = a_0 \sin \tau \left[1 + m^2 \left(1 + \frac{3}{4} \cos^2 \tau \right) \right],$$

где отношение постоянной a_0 к среднему расстоянию Луны от Земли a , равно

$$\frac{a_0}{a} = 1 - \frac{m^2}{6}. \quad (7.43)$$

Отклонения в движении Луны от вариационной кривой ищутся в первом приближении в компонентах δr и δs , где δr – радиальное отклонение, а δs – нормальное к радиусу отклонение. Достаточно громоздкие преобразования приводят в конце концов для вариаций δr и δs к уравнениям типа:

$$\frac{d^2 \delta}{d\tau^2} = \delta \sum_{k=0}^2 q_k \cos \tau. \quad (7.44)$$

Особенностью этих уравнений, которые получили название *уравнений Хилла*, является то, что при их решении методом итераций в высших приближениях появляются смешанные периодические члены, которых не должно быть, хотя в первом приближении величины δ гармонически колеблются с частотой $\sqrt{q_0}$. Чтобы избежать этого, Хилл предложил искать первое приближение в виде колебаний с частотой c , близкой к $\sqrt{q_0}$. Условие совместимости уравнений для амплитуд колебаний с частотами c_l ($l = 1, 2, \dots, l_0$, l_0 – номер приближения) дает уравнение для нахождения величины c . Во втором приближении

$$c = \sqrt{1 + \sqrt{(q_0 - 1)^2 - q_1^2}}. \quad (7.45)$$

Получив таким образом вторые приближения для вариаций δr и δs , переходят потом к уточненным координатам Луны x и y . А подставляя эти координаты в третье из уравнений (7.40), находят в этом же приближении координату z . Для завершения решения основной проблемы теории движения Луны нужно еще учесть эллиптичность солнечной орбиты. Это делается с помощью разложения обратного расстояния между Луной и Солнцем по степеням эксцентриситетов лунной и солнечной орбит.

Окончательные результаты представляются в виде рядов для эклиптических координат Луны и синуса ее горизонтального параллакса. Эти ряды после подстановки численных значений параметров и соответствующих вычислений таковы:

$$\begin{aligned} \lambda &= L + 377' \sin M + 13' \sin 2M + 76' \sin(2D - M) + 39' \sin 2D + 12' \sin M' - 2' \sin D + \dots, \\ \beta &= 308' \sin F + 17' \sin(M + F) - 17' \sin(M - F) - 10' \sin(F - 2D) - 3' \sin(M + D - 2D) - \\ &- 3' \sin(M - F - 2D) + 2' \sin(F + 2D) + \dots, \\ \sin p &= 57.04' + 3.11' \sin M + 0.17' \cos 2M - 0.47' \cos 2D - 0.58' \cos(2D - M) + \\ &+ 0.05' \cos(2D + M) - 0.03' \cos(2D - M') + \dots, \end{aligned} \quad (7.46)$$

где M и M' – средние аномалии Луны и Солнца, средняя долгота Луны $L = nt + \varepsilon$, D – разность средних долгот Луны и Солнца, $F = L - \Omega$.

Скорость прецессий узла и перигея лунной орбиты равны:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -n \left(2m + \frac{5}{2} m^2 \right) (1+m), \quad \frac{d\pi}{dt} = n \left(1 - \frac{c}{1+m} \right). \quad (7.47)$$

Ряды полной теории лунного движения, созданной Э. Брауном на основе идей Хилла, включают более 1300 членов. Та же теория, уточненная У. Еккертом, представлена рядами, насчитывающими более 1800 членов. Применение ЭВМ для вычисления рядов лунной теории с помощью программ, реализующих аналитические преобразования, позволило получить такие ряды с общим числом членов более 7000.

Периодические возмущения долготы Луны имеют название *неравенства лунного движения*. Второе и третье слагаемые в выражении для долготы в (7.46) описывают *эллиптические неравенства* в движении Луны. Четвертое слагаемое описывает *эвекцию*, пятое – *вариацию*, шестое – *годичное неравенство*, последнее, седьмое – *параллактическое неравенство*. Эллиптические неравенства открыл еще Гиппарх, существование эвекции установил Птолемей. Вариацию и годичное неравенство определил лишь в конце XVI ст. лучший наблюдатель дотелескопической астрономии Т. Браге. Хотя по величине вариация сопоставима с эвекцией, ее период равен половине синодического месяца, и она обращается в 0 в сизигиях. Поэтому античные астрономы, которых интересовали прежде всего солнечные и лунные затмения, не смогли заметить вариацию. Амплитуда параллактического неравенства относительно мала, но оно интересно тем, что зависит только от отношения больших полуосей орбит Луны и Солнца. Это дает еще один метод определения солнечного параллакса, откуда и происходит название этого неравенства.

Все факторы, указанные в табл. 7.1, не приводят к появлению вековых членов в значениях большой полуоси и среднего движения Луны. Однако еще Э. Галлей, опираясь на данные о затмениях в античную эпоху и средневековые, собранные Птолемеем и арабскими астрономами, установил наличие векового замедления в среднем движении Луны величиной приблизительно в $11''$ за 100 лет. Это объясняется (примерно в одинаковых долях) двумя факторами:

1) долгопериодическим возмущением (с периодом в 24 тыс. лет) эксцентризитета земной орбиты, которое на меньших промежутках времени проявляет себя аналогично вековому;

2) приливным трением в различных оболочках Земли (прежде всего в мелководных морях), которое приводит к уменьшению вращательного момента Земли и, соответственно, орбитального момента Луны (см., например, [2]).

Подробнее теория движения Луны изложена в [10, 36, 39]. Коэффициенты рядов лунного движения с точностью до $0.01''$ для эклиптических координат и до $0.001''$ для параллакса приведены в справочнике [38].

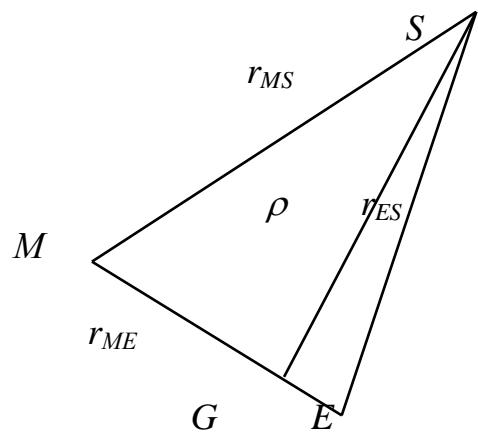


Рис. 7.1

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Элементы сферической тригонометрии. Системы астрономических координат

С тем, чтобы облегчить использование учебника лицам, не изучавшим систематического курса общей астрономии, ниже приведены основные формулы сферической тригонометрии, определения и формулы преобразования координат в системах координат, употребляемых в астрономии.

Треугольники на сфере образуются дугами больших кругов (окружностей, радиус которых равняется радиусу сферы). Стороны сферического треугольника можно измерять в угловой мере (градусах, радианах, временной мере) и рассматривать их тригонометрические функции. Углы сферического треугольника – это углы между касательными к дугам, образующим этот треугольник. Тригонометрические функции сторон и углов сферического треугольника связаны между собою целым рядом соотношений, из которых основными являются следующие (рис. Д1.1).

а) Формула косинусов:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A; \quad (\text{Д1.1})$$

б) формула синусов:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}; \quad (\text{Д1.2})$$

в) формула пяти элементов:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A. \quad (\text{Д1.3})$$

В прямоугольном сферическом треугольнике (рис. Д1.2):

$$\sin b = \sin a \sin B, \quad (\text{Д1.4})$$

$$\cos a = \cos b \cos C.$$

Сферическая система координат определяется основной плоскостью, которая проходит через центр сферы, и осью системы – прямой, проходящей через центр сферы перпендикулярно основной плоскости. Точки пересечения оси системы со сферой – полюсы системы. Одна из координат отсчитывается вдоль большого круга, образующегося при пересечении сферы основной плоскостью, другая – или от этого круга, или от одного из полюсов системы.

В астрономии, в небесной механике, в частности, используются такие системы координат на небесной сфере (сфере произвольного радиуса с центром в точке, где находится наблюдатель):

1. **Горизонтальная система.** Основная плоскость – это плоскость математического горизонта, ось системы – отвесная линия. Координаты – зенитное расстояние, отсчитывается от зенита вдоль вертикала (рис. Д1.3), $0^\circ \leq z \leq 180^\circ$; азимут – отсчитывается вдоль горизонта от точки юга (одна из точек пересечения горизонта с небесным меридианом) на запад, $0^\circ \leq A < 360^\circ$. Именно в горизонтальной системе непосредственно измеряются координаты светил на небесной сфере. Эта система связана с направлением силы тяжести

и может быть в принципе просто физически реализована с помощью отвеса и двух уровней. Однако горизонтальные координаты все время изменяются вследствие суточного вращения Земли и к тому же неравномерно.

2. Первая экваториальная система. Основная плоскость – плоскость, параллельная плоскости земного экватора, ось системы – ось мира, параллельная оси вращения Земли. Координаты – *склонение*, отсчитывается от небесного экватора вдоль круга склонения (рис. Д1.4), $0^\circ \leq \delta \leq +90^\circ$; *часовой угол*, отсчитывается вдоль небесного экватора от точки его пересечения с небесным меридианом, $0^h \leq t < 24^h$. Склонение не изменяется при суточном вращении Земли, а часовой угол изменяется равномерно, и поэтому используется для измерения времени.

3. Вторая экваториальная система. Основная плоскость и ось системы – те же самые, что и в первой экваториальной системе. Координаты – *склонение и прямое восхождение*, отсчитывается от точки весеннего равноденствия (одна из точек пересечения небесного экватора с эклиптикой, рис. Д1.4), $0^h \leq \alpha < 24^h$. Обе координаты не зависят от осевого вращения Земли, и поэтому именно они используются для задания положений светил на небесной сфере.

Различают топоцентрические экваториальные системы – начало системы находится в некоторой точке на поверхности Земли и геоцентрические – начало системы совпадает с центром Земли.

4. Эклиптическая система. Основная плоскость – плоскость эклиптики, то есть плоскость невозмущенной орбиты Солнца в его движении относительно Земли, ось системы – нормаль к плоскости эклиптики. Координаты – *эклиптическая широта*, отсчитывается от эклиптики (рис. Д1.5), $-90^\circ \leq \beta \leq +90^\circ$; *эклиптическая долгота*, отсчитывается вдоль эклиптики от точки весеннего равноденствия, $0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$. Используется для описания движения тел Солнечной системы, в частности, для задания элементов их орбит.

Из сферических треугольников *ZPM* (рис. Д1.6) и *RPM* (рис. Д1.7) и формул (Д1.1–Д1.3) вытекают такие формулы перехода между координатами в различных системах:

от горизонтальной системы к экваториальной –

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin t &= \sin z \sin A, \\ \cos \delta \cos t &= \cos z \cos \varphi + \sin z \sin \varphi \cos A, \\ \sin \delta &= \cos z \sin \varphi - \sin z \cos \varphi \cos A, \\ \alpha &= s - t, \end{aligned} \tag{Д1.5}$$

где φ – географическая широта места наблюдения, s – звездное время, измеряемое часовым углом точки весеннего равноденствия;

от экваториальной к горизонтальной –

$$\begin{aligned} \sin z \sin A &= \cos \delta \sin t, \\ \sin z \cos A &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t, \\ \cos z &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t; \end{aligned} \tag{Д1.6}$$

от экваториальной к эклиптической –

$$\begin{aligned}
 \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha, \\
 \cos\beta\sin\lambda &= \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha, \\
 \sin\beta &= \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha,
 \end{aligned} \tag{Д1.7}$$

где ε – наклонение эклиптики к небесному экватору;

от эклиптической к экваториальной –

$$\begin{aligned}
 \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda, \\
 \cos\delta\sin\alpha &= -\sin\beta\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon\sin\lambda, \\
 \sin\delta &= \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda.
 \end{aligned} \tag{Д1.8}$$

Наряду с геоцентрическими экваториальной и эклиптической системами координат используются гелиоцентрическая эклиптическая система и планетоцентрические экваториальные системы, связанные с плоскостью экватора какой-либо планеты.

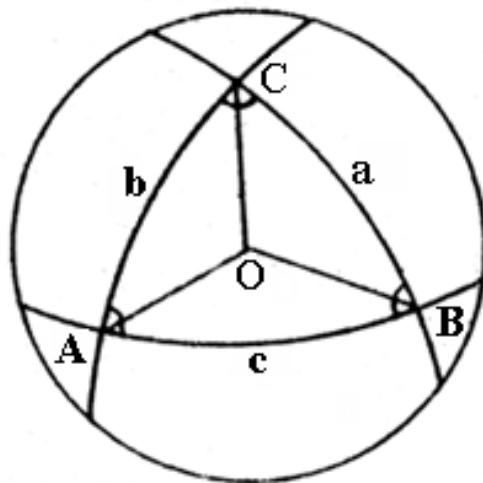


Рис. Д1.1. Сферический треугольник

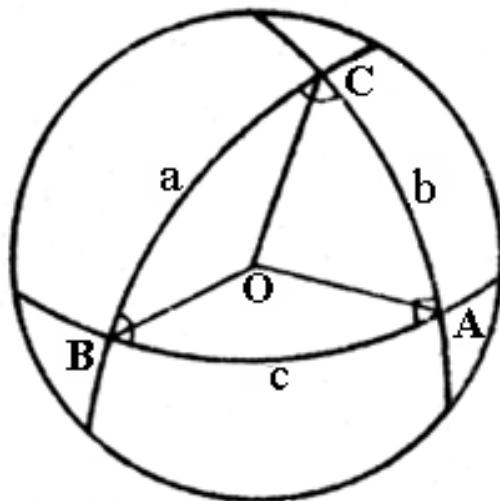


Рис. Д1.2. Сферический прямоугольный треугольник

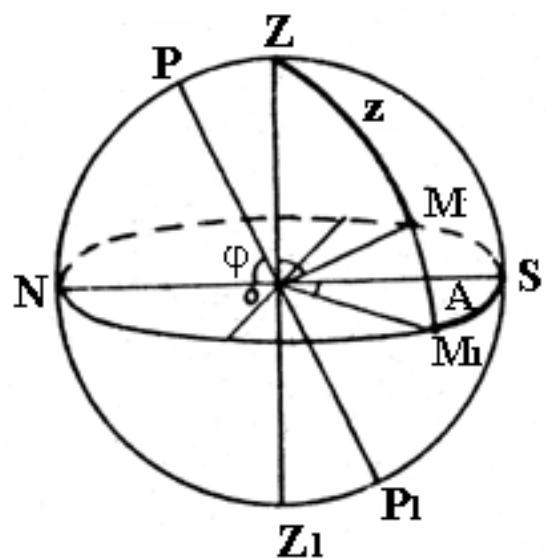


Рис. Д1.3. Горизонтальная
система координат

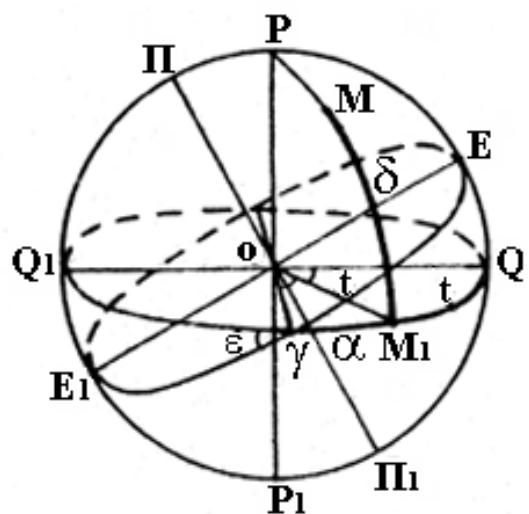


Рис. Д1.4. Экваториальная система
координат

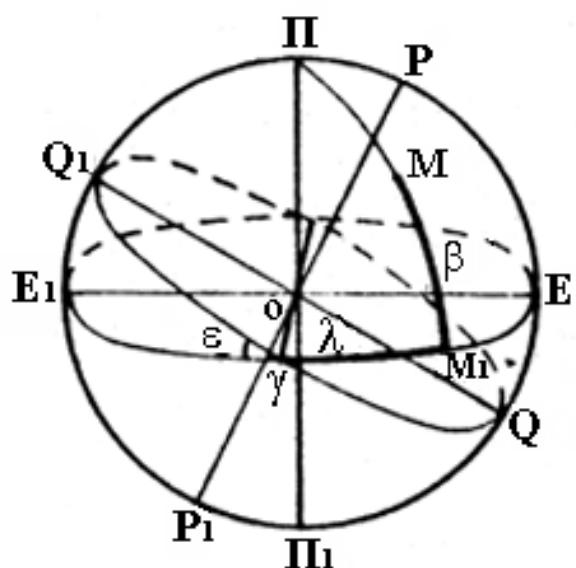


Рис. Д1.5. Эклиптическая система координат

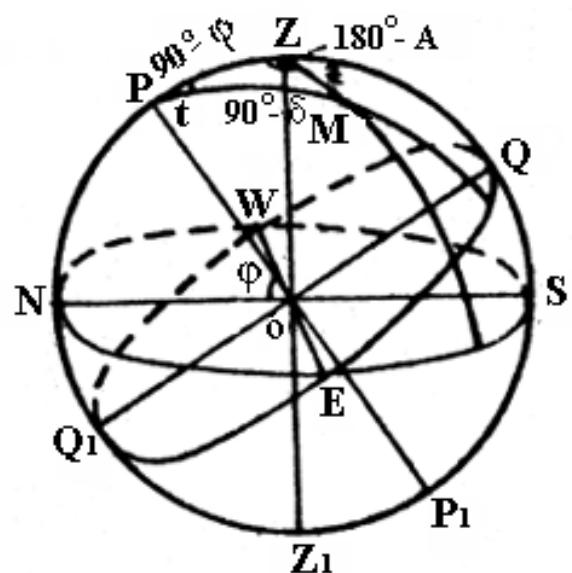


Рис. Д1.6. Связь между горизонтальной и экваториальной системами координат

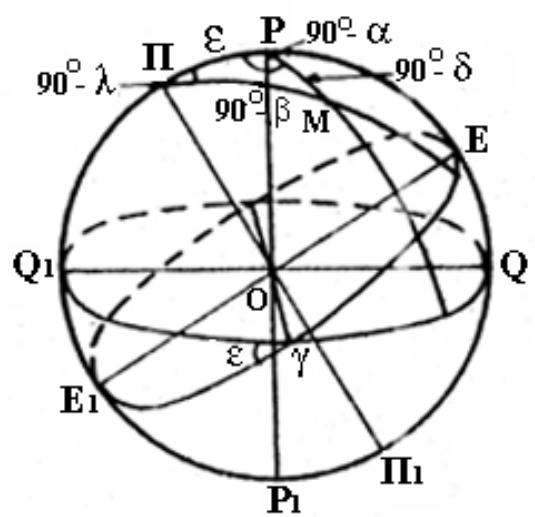


Рис. Д1.7. Связь между экваториальной и эклиптической системами координат

Приложение 2

Вычисление эфемерид

Исходные данные:

Моменты времени: t_l , $l = 1, 2, \dots, N$.

Эклиптические элементы орбиты тела Солнечной системы:

- а) $\Omega, \omega, i, e, a, M_0$ – для эллиптической орбиты;
- б) $\Omega, \omega, i, q, \tau$ – для параболической орбиты.

Прямоугольные экваториальные координаты Солнца X_l, Y_l, Z_l .

1. Вычисление экваториальных элементов орбиты:

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i, \\ P_y &= (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i) \cos \varepsilon - \sin \omega \sin i \sin \varepsilon, \\ P_z &= (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i) \sin \varepsilon + \sin \omega \sin i \cos \varepsilon, \\ Q_x &= -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i, \\ Q_y &= (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i) \cos \varepsilon - \cos \omega \sin i \sin \varepsilon, \\ Q_z &= (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i) \sin \varepsilon + \cos \omega \sin i \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{Д2.1})$$

2. Вычисление средней аномалии для заданных моментов времени:

$$M_l = \frac{k}{a^{3/2}} (t_l - t_0) + M_0, \quad k = 0.0172021 \quad (\text{Д2.2})$$

3. а) Нахождение соответствующих значений эксцентриситической аномалии путем решения уравнения Кеплера методом итераций:

$$E_l^{(n+1)} = M_l + e \sin E_l^{(n)}, \quad E_l^{(0)} = M_l; \quad (\text{Д2.3})$$

б) нахождение соответствующих значений параметра σ численным решением уравнения Баркера:

$$\sigma_l^3 + 3\sigma_l = \frac{3k}{q^{3/2} \sqrt{2}} (t_l - \tau). \quad (\text{Д2.4})$$

4. Вычисление орбитальных гелиоцентрических прямоугольных координат:

$$\text{а) } \xi_l = a(\cos E_l - e), \quad \eta_l = a\sqrt{1-e^2} \sin E_l; \quad (\text{Д2.5})$$

$$\text{б) } \xi_l = q(1-\sigma_l^2), \quad \eta_l = 2q\sigma_l. \quad (\text{Д2.6})$$

5. Вычисление экваториальных гелиоцентрических прямоугольных координат:

$$\begin{aligned} x_l &= P_x \xi_l + Q_x \eta_l, \\ y_l &= P_y \xi_l + Q_y \eta_l, \\ z_l &= P_z \xi_l + Q_z \eta_l. \end{aligned} \quad (\text{Д2.7})$$

6. Вычисление геоцентрических экваториальных координат:

$$\begin{aligned} \rho_l &= \sqrt{(x_l + X_l)^2 + (y_l + Y_l)^2 + (z_l + Z_l)^2}, \\ \operatorname{tg} \delta_l &= \frac{z_l + Z_l}{\sqrt{(x_l + X_l)^2 + (y_l + Y_l)^2}}, \\ \operatorname{tg} \alpha_l &= \frac{y_l + Y_l}{x_l + X_l}. \end{aligned} \quad (\text{Д2.8})$$

При нахождении прямого восхождения нужно внимательно определять четверть, в которой лежит его значение.

Прямоугольные геоцентрические экваториальные координаты Солнца X_l, Y_l, Z_l берутся из астрономического ежегодника или вычисляются с помощью соответствующей стандартной программы на ПК.

При выполнении вычислений с помощью калькулятора обязательно нужно выполнять и вычисления контрольных соотношений (см. [39]).

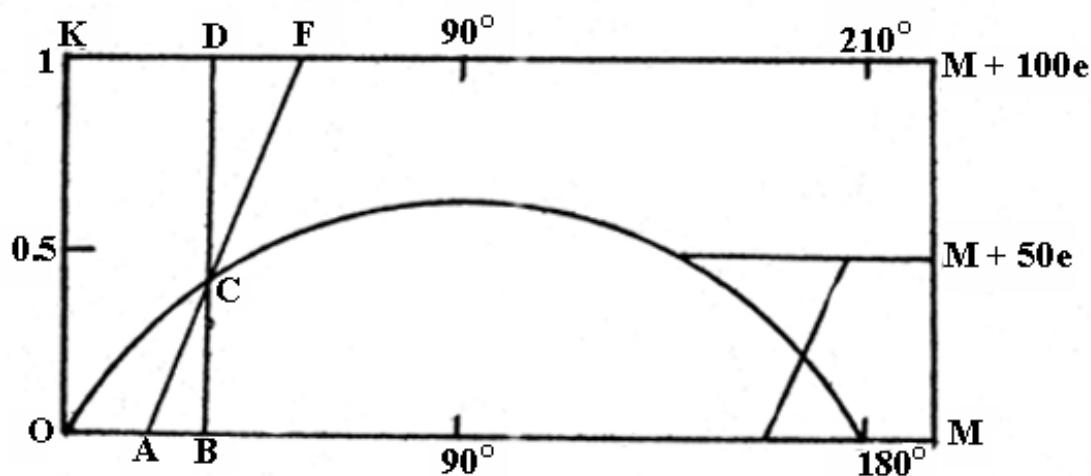


Рис. Д 2.1. Номограмма для решения уравнения Кеплера

Приложение 3

Определение эллиптической орбиты по трем наблюдениям

Исходные данные: геоцентрические экваториальные координаты тела Солнечной системы α_k, δ_k и геоцентрические прямоугольные координаты Солнца X_k, Y_k, Z_k для трех моментов времени t_k ($k=1,0,2$), которые являются приблизительно равноотстоящими.

1. Вычисление направляющих косинусов:

$$\lambda_k = \cos \delta_k \cos \alpha_k, \quad \mu_k = \cos \delta_k \sin \alpha_k, \quad \nu_k = \sin \delta_k. \quad (\text{ДЗ.1})$$

2. Вычисление величин

$$R_0^2 = X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2, \quad C = -(\lambda_0 X_0 + \mu_0 Y_0 + \nu_0 Z_0) \quad (\text{ДЗ.2})$$

и детерминантов

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad U_k = \begin{vmatrix} X_k & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y_k & \mu_1 & \mu_2 \\ Z_k & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}. \quad (\text{ДЗ.3})$$

3. Вычисление величин

$$\tau_1 = k(t_2 - t_0), \quad \tau_2 = k(t_0 - t_1), \quad \tau_0 = k(t_2 - t_1), \quad k = 0.0172021,$$

$$n_i^0 = \frac{\tau_i}{\tau_0}, \quad c_i = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_i^0), \quad n_{1,2} = n_{1,2}^0 + c_{1,2} / r^3 \quad i = 1,2. \quad (\text{ДЗ.4})$$

4. Нахождение гелиоцентрического расстояния r_0 и геоцентрического расстояния ρ_0 методом итераций из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= P - Qr_0^{-3}, \\ r_0^2 &= (\rho_0 + C)^2 + S^2, \end{aligned} \quad (\text{ДЗ.5})$$

где

$$P = \frac{U_0 - n_1^0 U_1 - n_2^0 U_2}{D}, \quad Q = \frac{c_1 U_1 + c_2 U_2}{D}, \quad S^2 = R_0^2 - C^2. \quad (\text{ДЗ.6})$$

5. Нахождение геоцентрических расстояний $\rho_{1,2}$ из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_1 n_1 \lambda_1 + \rho_2 n_2 \lambda_2 &= \rho_0 \lambda_0 + n_1 X_1 - X_0 + n_2 X_2, \\ \rho_1 n_1 \mu_1 + \rho_2 n_2 \mu_2 &= \rho_0 \mu_0 + n_1 Y_1 - Y_0 + n_2 Y_2, \\ \rho_1 n_1 \nu_1 + \rho_2 n_2 \nu_2 &= \rho_0 \nu_0 + n_1 Z_1 - Z_0 + n_2 Z_2 \end{aligned} \quad (\text{ДЗ.7})$$

методом наименьших квадратов или из тех двух уравнений, которые имеют наибольший детерминант, и где $n_i = n_i^0 + c_i r_0^{-3}$, $i = 1,2$.

6. Вычисление гелиоцентрических координат и расстояний:

$$\begin{aligned} x_k &= \lambda_k \rho_k - X_k, \\ y_k &= \mu_k \rho_k - Y_k, \\ z_k &= \nu_k \rho_k - Z_k, \\ r_k &= \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}. \end{aligned} \quad (\text{ДЗ.8})$$

7. Редукция моментов наблюдений за aberrацию света:

$$t_k^0 = t_k - \frac{\rho_k}{c}, \quad \frac{1}{c} = 0.0057756^d. \quad (\text{ДЗ.9})$$

8. Определение величин n_i во втором приближении:

$$n_i = \frac{1 + B_i r_i^{-3}}{1 - B_0 r_0^{-3}} n_i^0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{ДЗ.9})$$

где

$$B_1 = \frac{1}{12}(\tau_0 \tau_2 - \tau_1^2), \quad B_0 = \frac{1}{12}(\tau_1 \tau_2 + \tau_0^2), \quad B_2 = \frac{1}{12}(\tau_0 \tau_1 - \tau_2^2). \quad (\text{ДЗ.10})$$

9. Нахождение отношения площади сектора к площади треугольника η_0 во втором приближении с помощью цепной дроби:

$$\eta_0 = 1 + \frac{10}{11} \frac{d}{1 + \frac{d}{1 + \dots}},$$

(ДЗ.11)

где

$$d = \frac{22\tau_0^2}{\kappa^2(6\kappa + 9(r_1 + r_2))}, \quad \kappa^2 = 2(r_1 r_2 + I), \quad I = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (\text{ДЗ.12})$$

10. Вычисление расстояний r_0, ρ_k ($k = 1, 0, 2$) во втором приближении.

11. Вычисление координат x_k, y_k, z_k и расстояний r_i ($i = 1, 2$) во втором приближении.

12. Вычисление параметра орбиты:

$$p = B^2 \left(\frac{\eta_0}{\tau_0} \right)^2, \quad (\text{ДЗ.13})$$

где $B^2 = |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|$.

13. Вычисление эксцентриситета орбиты:

$$e^2 = \frac{f_1^2 + g_1^2}{r_1^2} \quad \text{или} \quad e^2 = \frac{f_2^2 + g_2^2}{r_2^2},$$

где

$$g_1 = \frac{f_1 I - f_2 r_1^2}{r_1^2}, \quad g_2 = \frac{f_1 r_2^2 - f_2 I}{r_2^2}, \quad f_{1,2} = p - r_{1,2}.$$

14. Вычисление большой полуоси:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}. \quad (\text{ДЗ.14})$$

15. Вычисление эксцентрических и средних аномалий и среднего движения:

$$\operatorname{tg} E_i = \frac{g_i}{(a - r_i) \sqrt{1 - e^2}}, \quad M_i = E_i - e \sin E_i, \quad n = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1} \quad \text{или} \quad n = k a^{-3/2}, \quad i = 1, 2.$$

(ДЗ.16)

16. Вычисление экваториальных векторных элементов орбиты:

$$\begin{aligned} P_x &= x_1 C - K_x S, & Q_x &= x_1 S + K_x C, \\ P_y &= y_1 C - K_y S, & Q_y &= y_1 S + K_y C, \\ P_z &= z_1 C - K_z S, & Q_z &= z_1 S + K_z C, \end{aligned} \quad (\text{ДЗ.17})$$

где

$$C = \frac{f_1}{r_1^2 e}, \quad S = \frac{g_1}{r_1^2 e}, \quad K_x = \frac{x_2 r_1^2 - x_1 I}{B} \text{ и аналогичные формулы для } K_y, K_z, \quad (\text{ДЗ.18})$$

$$R_x = \frac{(\bar{r}_1 \times r_2)_x}{B} \text{ и аналогичные формулы для } R_y, R_z.$$

17. Вычисление эклиптических векторных элементов орбиты:

$$\begin{aligned} \bar{P}_x &= P_x, \\ \bar{P}_y &= P_y \cos \varepsilon + P_z \sin \varepsilon, \\ \bar{P}_z &= P_y \sin \varepsilon - P_z \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{ДЗ.19})$$

и аналогичные формулы для $\bar{Q}_x, \dots, \bar{R}_z$.

18. Вычисление долготы узла, наклонения орбиты и перигелийного расстояния из соотношений:

$$\sin \Omega \sin i = \bar{R}_x, \quad \cos \Omega \sin i = -\bar{R}_y, \quad \cos i = \bar{R}_z, \quad \sin \omega \sin i = \bar{P}_z, \quad \cos \omega \sin i = Q_z. \quad (\text{ДЗ.20})$$

Контроль: Вычисление экваториальных координат для среднего момента времени t_0 .

Приложение 4

Основные труды по небесной механике

Приведены годы первого издания, для многотомных трудов – годы издания первого и последнего томов.

- 1543 г. Н. Коперник „Об обращении небесных сфер”
1609 г. И. Кеплер „Новая астрономия”
1686 г. И. Ньютон „Математические начала натуральной философии”
1746–1753 г.г. Труды А. Клеро, Ж. Даламбера, Л. Эйлера по теории движения Луны
1788 г. Ж. Лагранж „Аналитическая механика”
1798–1825 г.г. П. Лаплас „Трактат по небесной механике” (5 томов)
1810 г. К. Гаусс „Теория движения небесных тел”
1822 г. Ф. Ф. Шуберт „Трактат по теоретической астрономии”
1834 г. У. Гамильтон „Об общем методе в динамике”
1830–1847 г.г. Ж. Понтекулан „Аналитическая система мира” (3 тома)
1860 г. Ж. Делоне „Теория движения Луны”
1866 г. К. Якоби „Лекции по динамике”
1878 г. Д. Хилл „Исследования по теории Луны”
1889–1896 г.г. Ф. Тиссеран „Трактат по небесной механике” (4 тома)
1892 г. А. М. Ляпунов „Общая задача об устойчивости движения”
1892–1899 г.г. А. Пуанкаре „Новые методы в небесной механике” (3 тома)
1902–1907 р.р. К. Шарлье „Небесная механика” (2 тома)
1902 г. Ф. Мультон „Введение в небесную механику”
1912 г. К. Зундман „Мемуар о задаче трех тел”
1930 г. Ж. Шази „Теория относительности и небесная механика”
1933–1949 г.г. М. Ф. Субботин „Курс небесной механики” (3 тома)
1941 г. А. Уинтнер „Аналитические основы небесной механики”
1956 г. К. Зигель „Лекции по небесной механике”
1963–1983 р.р. Г. М. Дубошин „Небесная механика” (3 тома)

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

1.1. Для $r > R$

$$V = \frac{2fM}{r} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} P_{2n}(\theta) \left(\frac{R}{r} \right)^{2n} \right].$$

1.2. См. [18] или [23].

1.3. Воспользоваться результатом задачи 1.2.

1.4. Воспользоваться интегралом энергии и соотношением, вытекающим для силовой функции из теоремы Эйлера об однородной функции.

1.5. К сумме модулей кинетических моментов точек системы применить неравенство Коши–Буняковского, а потом воспользоваться первым из соотношений задачи 1.4.

1.7. Умножить неравенство Зундмана (задача 1.5) на I/I и проинтегрировать его.

1.8. Использовать второе соотношение задачи 1.4 и результат задачи 1.6.

1.9. Использовать уравнения (1.22).

1.10. а) $\ddot{r}_i - r_i \dot{\phi}_i^2 - r_i \lambda_i^2 \cos^2 \varphi_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial r_i},$

$$\frac{d}{dt}(r_i^2 \dot{\phi}_i) + r_i^2 \dot{\lambda}_i^2 \sin \varphi_i \cos \varphi_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \varphi_i},$$

$$\frac{d}{dt}(r_i^2 \dot{\lambda}_i \cos^2 \varphi_i) = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \lambda_i},$$

где

$$\Omega_i = \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i} + f \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i \cos \gamma_{ij}}{r_j^2} \right),$$

γ_{ij} – угол между векторами \vec{r}_i и \vec{r}_j .

б) $m_i' \ddot{\vec{r}}_i' = \text{grad}U, \quad m_i' = m_i \frac{\sum_{j=1}^{i-1} m_j}{\sum_{j=1}^i m_j}.$

2.1. Исключить нормальную к радиусу компоненту скорости из интеграла энергии с помощью интеграла моментов.

2.2. $p = \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2 \sin^2 \delta, \quad e = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2 (r_0^2 V_0^2 - 2\mu) \sin^2 \delta}.$

2.3. $\operatorname{tg} \omega = \frac{c \lambda_3}{c_1 \lambda_2 - c_2 \lambda_1}, \quad \cos \omega = \frac{\lambda_1 \cos \Omega + \lambda_2 \sin \Omega}{\lambda}.$

2.4. $\operatorname{tg} \delta = a \sqrt{\frac{1 - e^2}{a^2 e^2 - (a - r)^2}}.$

2.5. $r = \frac{\mu r_0}{2\mu - r_0^2 V_0^2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{\mu^2 + r_0^2 V_0^2 (r_0^2 V_0^2 - 2\mu) \sin^2 \delta_0 / \mu^2}{\mu^2 \sin^2 \delta_0}} \right],$

$$V = \frac{\mu \sin \delta_0}{r_0 V_0 \sin \delta} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{r_0^2 V_0^2 (r_0^2 V_0^2 - 2\mu) \sin^2 \delta_0}{\mu^2 \sin^2 \delta}} \right].$$

$$2.6. \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{a(1-e^2)}{r e \sin v}.$$

$$2.7. \quad r_{\text{c.ap.}} = a, \quad r_{\text{c.геом.}} = \sqrt{r_a r_\pi}, \quad r_{\text{c.гарм.}} = p.$$

$$2.8. \quad \text{а) } V_0^2 = 2gR \quad \text{б) } V_0^2 = 2gH.$$

2.11. Записать параметрические уравнения гелиоцентрической орбиты Луны $x(t), y(t)$, найти кривизну и доказать ее положительность с помощью третьего закона Кеплера.

2.12. Доказать, что кривизна орбиты планеты изменяет свой знак.

$$2.13. \quad \ddot{z} + \frac{\mu z}{|z|^3} = 0. \quad \text{Воспользоваться тем, что } z = a \cos E + i b \sin E, \text{ а } V = |\dot{z}|.$$

2.14. Годограф скорости является окружностью с радиусом $\sqrt{p/\mu}$ и координатами центра $(0, e\sqrt{\mu/p})$ в плоскости орбиты.

$$2.15. \quad V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r} \left(1 + J_2 \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)}, \quad V_p = 2 \sqrt{\frac{\mu}{r} \left(1 + \frac{1}{3} J_2 \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)}.$$

$$2.16. \quad \theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\mu}{b V_\infty^2}.$$

$$2.17. \quad \delta q = \frac{a}{2} (1-e)^2, \quad \delta V = \sqrt{\frac{\mu}{a} (1-e)}.$$

3.1. Воспользоваться равенствами $E = M + e \sin E$ и $E_{n+1} = M + e \sin E_n$.

3.2. Разделить линейное по e приближение для $\sin E$ на линейное приближение для $\cos E$.

$$3.3. \quad \begin{aligned} \left(\frac{V}{na}\right)^2 &= 1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(k e) \cos kM, \\ \left(\frac{V}{na}\right)^2 &= e \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \sin kM, \\ \left(\frac{V_n}{na}\right)^2 &= \sqrt{1-e^2} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(k e) \cos kM \right]. \end{aligned}$$

$$3.6. \quad T = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(a_1(1 \pm e_1) + a_2(1 \pm e_2))^3}{2}}.$$

3.9. Взять силовую функцию согласно задаче 1.3 в виде $U = [A(x^2 + y^2) + Bz^2]$. Тогда уравнение орбиты и закон движения по ней в цилиндрических координатах:

$$\int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{A\rho^4 + (\alpha_3 + 2\alpha_2)\rho^2 - \alpha_2^2}} - \int \frac{dz}{\sqrt{Bz^2 - \alpha_3}} = \beta_3,$$

$$\lambda - \int \frac{d\rho}{\sqrt{A\rho^4 + (\alpha_3 + 2\alpha_1)\rho^2 - \alpha_2^2}} = \beta_2,$$

$$\int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{A\rho^4 + (\alpha_3 + 2\alpha_1)\rho^2 - \alpha_2^2}} = t + \beta_1.$$

3.10. Проинтегрировать интеграл момента в пределах периода P и воспользоваться теоремой, согласно которой площадь параллелограмма, описанного вокруг эллипса, равна $4\rho_1\rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 – сопряженные диаметры эллипса.

3.11. Воспользоваться интегралом энергии.

3.12. Сделать замену переменных: $\vec{r} = \{at + b\}\vec{\rho}$.

3.13. $\approx 5^\circ$.

3.14. Воспользоваться первыми интегралами: $u^0 = \text{const}$ и $g_{ik}u^i u^k = -1$, где u^i – четырехмерная скорость, целесообразно использовать систему единиц, в которой скорость света $c=1$, тогда $r_g = M$.

$$3.15. \quad t = -\frac{\sqrt{\mu - c^2}}{2h}, \quad h < 0, \quad \mu > c^2, \quad N = 4.$$

$$t = \int_0^{r_1} \frac{r^{N-2} dr}{\sqrt{hr^{N-2} - c^2 r^{N-4} + \frac{2\mu}{N-2}}}, \quad N \geq 5.$$

$$4.1. \quad S = \frac{F_\tau e \sin v - F_n (1 + e \cos v)}{\sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}, \quad T = \frac{F_\tau (1 + e \cos v + F_n e \sin v)}{\sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}.$$

$$4.2. \quad \frac{dq}{dt} = \sin \tilde{u} S + [(q + \cos u) \Lambda^{-1}] \tilde{T} + p \sin u \Lambda^{-1} \operatorname{ctg} i \tilde{W},$$

$$\frac{dp}{dt} = -\cos u \tilde{S} + [(p + \sin u) \Lambda^{-1} + \sin u] \tilde{T} - p \sin u \Lambda^{-1} \operatorname{ctg} i \tilde{W},$$

$$\Lambda = 1 + q \cos u + p \sin u.$$

$$4.3. \quad \frac{dl}{dt} = \frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial m} - \frac{m \sec i \sec^2(i/2)}{2na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right),$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial l} - \frac{m \sec i \sec^2(i/2)}{2na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right).$$

$$4.4. \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \left[\sin v \left(1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{T} - \cos v \tilde{S} \right],$$

$$\frac{dr_\pi}{dt} = \frac{p}{(1+e)^2} \left[-\sin v \tilde{S} + \frac{2(1-\cos v) + e \sin^2 v}{1+e \cos v} \tilde{T} \right],$$

$$\frac{dr_a}{dt} = \frac{p}{(1+e)^2} \left[\sin v \tilde{S} + \frac{2(1-\cos v) - e \sin^2 v}{1+e \cos v} \tilde{T} \right].$$

4.5. Взять возмущающую функцию в виде:

$$R = -\frac{\alpha \mu t}{r} \approx -\frac{\alpha \mu t}{a} (1 + e \cos(nt + \varepsilon - \pi)).$$

4.7. Исследовать устойчивость соответствующего решения уравнения Бине.

4.8. Воспользоваться выражением для силовой функции задачи 1.2.

4.9. Использовать силовую функцию:

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{fM}{r} + \frac{f}{r^5} [(B+C-2A)x^2 + (a+c-2B)y^2 + (A+B-2C)z^2].$$

Точки равновесия на концах большой оси – неустойчивы, на концах малой оси – устойчивы.

4.10. Нулевое решение устойчиво при всех значениях коэффициентов b и c .
Взять в качестве функции Ляпунова $V = l^2 + m^2$.

5.3. Сжатие $e = 2.4 \cdot 10^{-5}$.

$$5.4. \quad \bar{R} = -\frac{\mu J_4 a^4}{a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left[3 - 15 \sin^2 i + \frac{105}{8} \sin^4 i \right] \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right).$$

5.6. Приравнять нулю дискриминант уравнения для $\cos^2 i$ при $\sin^2 \omega = 1$.

5.7. $e = 0.994$, $r_\pi = 2440 \text{ км}$.

5.8. Найти эволюционные уравнения для величин a, r_π, T (см. задачу 4.4) в линейном приближении, а потом разложить в ряд по степеням α соответствующие функции Бесселя.

$$6.1. \quad x = y = 0, \quad \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{\zeta(4 + h\zeta(\zeta^2 - 1))}} = 2h(t - t_0), \quad \zeta^2 = z^2 + \frac{1}{2}.$$

6.2. Условия финитности движения – расстояние в афелии меньше расстояния между Солнцем и точкой либрации L_2 . Движение Гильды – неустойчиво, Евы – устойчиво.

6.3. См. [18].

6.4. Воспользоваться уравнениями (6.46).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов Е. П. Специальные функции в небесной механике. – М.: Наука, 1986.–318 с.
2. Александров Ю. В. Введение в физику планет. – К.: Вища школа, 1982. – 303 с.
3. Антонов В. А., Холшевников К. В., Тимошкова Е. И. Введение в теорию ньютонаовского потенциала. – М.: Наука, 1988. – 268 с.
4. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. Н. Математические аспекты классической и небесной механики. – М.: УРСС, 2002. – 414 с.
5. Балк В. М., Демин В. Г., Куницын А. Л. Сборник задач по небесной механике и астродинамике. – М.: Наука, 1972. – 336 с.
6. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 304 с.
7. Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. – М.: Наука, 1977.–436 с.
8. Бордовицьна Т. В. Современные численные методы в задачах небесной механики. – М.: Наука, 1984. – 136 с.
9. Борисенко А. И., Тарапов И. Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – Харьков: Вища школа, 1989. – 236 с.
10. Брауэр Д., Клеменс Д. Методы небесной механики. – М.: Мир, 1964. – 514 с.
11. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972.–382 с.
12. Гинзбург В. Л. О физике и астрофизике. – М.: Наука, 1985. – 400 с.
13. Гребенников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике. – М.: Наука, 1971. – 442 с.
14. Гребенников Е. А., Рябов Ю. А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. – М.: Наука, 1978. – 120 с.
15. Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. – М.: Наука, 1968. – 352 с.
16. Диаку Ф., Холмс Ф. Небесные встречи. Истоки хаоса и устойчивости. – М.: РХД, 2004. – 304 с.
17. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы.– М.: Наука, 1968. – 799 с.
18. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1964. – 560 с.
19. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Методы теории движения искусственных небесных тел. – М.: Наука, 1983. – 351 с.
20. Емельянов Н. В. Методы составления алгоритмов и программ в задачах небесной механики. – М.: Наука, 1983. – 128 с.
21. Зельманов А. Л., Агаков В. Г. Элементы общей теории относительности. – М.: Наука, 1989. – 236 с.

22. Кинг-Хили Д. Теория орбит искусственных спутников в атмосфере. – М.:Мир, 1966. – 189 с.
23. Кондратьев Б. П. Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. – М.:Наука, 1989. – 269 с.
24. Курс астрофизики и звездной астрономии.– Т. 2. / Под ред. А. А. Михайлова. – М.: Физматгиз, 1962. – 688 с.
25. Ландау Л. Д., Либшиц Е. М. Механика. – М.: Наука, 1988. – 215 с.
26. Ландау Л. Д., Либшиц Е. М. Теория поля. – М.: Наука, 1988. – 509 с.
27. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. – Т. 2. – Изд-во АН СССР, 1956. – 473 с.
28. Михайлов А. А. Теория затмений.– М.: Гостехиздат, 1954. – 277 с.
29. Неустойчивости в динамических системах. Приложения к небесной механике /Под ред. В.Себехея. – М.: Мир, 1982. – 168 с.
30. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. – М.: Наука, 1989. – 687 с.
31. Охоцумский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г. Основы механики космического полета. – М.:Наука, 1990. – 445 с.
32. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. – М.: Наука, 1965. – 571 с.
33. Пуанкаре А. Новые методы в небесной механике // Избр. труды. – М.: Наука, 1979. – 771 с.
34. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – 560 с.
35. Розенталь И. Л. Геометрия. Частицы. Вселенная. – М.: Наука, 1987. – 143 с.
36. Рой А. Движение по орбитам. – М.: Мир, 1981. – 544 с.
37. Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. – М.: Мир, 1982.
–
666 с.
38. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г. Н. Дубошина. – М.: Наука, 1976. – 862 с.
39. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. – М.: Наука, 1968. –800 с.
40. Тассуль Ж. Теория вращающихся звезд. – М.: Мир, 1982. – 472 с.
41. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. – М.: Наука, 1967. –523 с.
42. Херрик С. Астродинамика: в 3 т. – М.: Мир, – Т. 1. 1976. – 318 с.; Т. 2. 1977. – 263 с.; Т. 3. 1978. – 360 с.
43. Холшевников К. В. Асимптотические методы в небесной механике. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. – 208 с.
44. Чеботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики. – М.–Л.: Наука, 1965. – 367 с.
45. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. – М.: Наука, 1965. – 540 с.
46. Эскобал П. Определение орбит. – М.:Мир, 1972. – 341 с.

47. *Laplace P.* Traite de mecanique celetste. – Paris, – T. 1. 1798. – 368 p.; – T. 2. 1802. – 353 p.; – T. 3. 1802. – 341 p.; – T. 4. 1805. – 372 p.; – T. 5. – 327 p.
48. *USNO Circular № 163.* – Washington, 1981. – P. C1–C4.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Глава I. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

1.1. Гравитационные поля небесных тел

1.1.1. Гравитационное поле произвольного тела

1.1.2. Гравитационные поля звезд и планет

1.2. Задача многих тел в инерциальной системе координат

1.2.1. Уравнения задачи многих тел в инерциальной системе координат

1.2.2. Силовая функция

1.2.3. Первые интегралы задачи многих тел

1.2.4. Задача многих тел в барицетрической системе координат

1.3. Задача многих тел в относительной системе координат

Задачи к главе I

Глава II. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

2.1. Общее решение задачи двух тел

2.1.1. Уравнения задачи двух тел

2.1.2. Первые интегралы задачи двух тел

2.1.3. Уравнение орбиты и закон движения в задаче двух тел

2.1.4. Кеплеровские элементы орбиты

2.1.5. Классификация движений в задаче двух тел

2.2. Отдельные типы кеплеровского движения

2.2.1. Эллиптическое движение

2.2.2. Гиперболическое движение

2.2.3. Круговое движение

2.2.4. Параболическое движение

2.2.5. Прямолинейное движение

Задачи к главе II

Глава III. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

3.1. Ряды эллиптического движения

3.1.1. Решение уравнения Кеплера

3.1.2. Степенные ряды эллиптического движения

3.1.3. Тригонометрические ряды эллиптического движения

3.2. Краевая задача. Определение орбит

3.3. Интегрирование задачи двух тел методом Гамильтона–Якоби

3.4. Движение под действием центральной силы

3.5. Релятивистская задача двух тел

3.5.1. Элементы общей теории относительности

3.5.2. Центрально-симметричное поле

3.5.3. Движение материальной точки в поле Шварцшильда

3.6. Задача двух тел в пространстве произвольного числа измерений

Задачи к главе III

Глава IV. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

- 4.1. Метод оскулирующих элементов
 - 4.1.1. Основы метода
 - 4.1.2. Уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов
 - 4.1.3. Уравнения Ньютона для оскулирующих элементов
- 4.2. Интегрирование уравнений возмущенного движения
 - 4.2.1. Приближенное интегрирование уравнений для оскулирующих элементов
 - 4.2.2. Вековые и периодические возмущения
 - 4.2.3. Метод осреднения. Эволюционные уравнения
- 4.3. Устойчивость движения небесных тел
 - 4.3.1. Элементы теории устойчивости движения
 - 4.3.2. Устойчивость движения в задаче многих тел
 - 4.3.3. Устойчивость вращательного движения спутника на круговой орбите

Задачи к главе IV

Глава V. ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА

- 5.1. Влияние сжатия центрального тела на движение спутника
 - 5.1.1. Возмущенное движение спутника в первом приближении
 - 5.1.2. Задача двух неподвижных центров и ее применение
- 5.2. Влияние третьего тела на движение спутника
 - 5.2.1. Возмущающий потенциал и его осреднение
 - 5.2.2. Эволюционные уравнения и их первые интегралы
- 5.3. Влияние сопротивления атмосферы на движение искусственного спутника планеты
 - 5.3.1. Сила сопротивления атмосферы
 - 5.3.2. Эволюционные уравнения
 - 5.3.3. Приближенное интегрирование эволюционных уравнений

Задачи к главе V

Глава VI. ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

- 6.1. Ограниченнная задача трех тел
 - 6.1.1. Круговая ограниченная задача трех тел
 - 6.1.2. Плоская круговая ограниченная задача трех тел
- 6.2. Точки либрации и линии Хилла
 - 6.2.1. Точки либрации
 - 6.2.2. Устойчивость точек либрации
 - 6.2.3. Линии Хилла
- 6.3. Неограниченная задача трех тел

Задачи к главе VI

Глава VII. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

- 7.1. Обзор методов в теориях движения тел Солнечной системы
 - 7.1.1. Численные методы
 - 7.1.2. Аналитические методы
- 7.2. Вековые возмущения. Метод Лагранжа
 - 7.2.1. Разложение возмущающей функции
 - 7.2.2. Собственные элементы орбиты

7.3. Основы теории движения Луны

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Элементы сферической тригонометрии. Системы астрономических координат

Приложение 2. Вычисление эфемерид

Приложение 3. Определение эллиптической орбиты по трем наблюдениям

Приложение 4. Основные труды по небесной механике

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ