III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії 2011/2012 навчального року. Харківська область, 10 клас.

Задачі та їх рішення для 10 класу

Задача 1. (5 балів) Які характеристики повинно мати небесне тіло, щоб його можна було назвати планетою Сонячної системи.

Рішення Планета – це небесне тіло, котре:

а) Обертається навколо Сонця.

б) Має масу, достатню щоб власна гравітація перевищує міцність речовини, і тіло прийняло форму, що близька до сферичної (гідростатично рівноважну).

в) У процесі свого формування поглинуло (притягнуло і включило у свій склад) інші тіла в околиці своєї орбіти. При невиконанні умови (в) тіло буде за сучасною номенклатурою називатись «карликовою планетою».

Задача 2. (5 балів) Визначте масу атмосфери Венери, якщо тиск на її поверхні дорівнює $P = 1.0 \times 10^7$ Па.

Рішення З визначення тиск то є сила, яка діє на одиницю площі поверхні:

$$P = F/S.$$

Сила, яка діє на всю поверхню Венери, дорівнюватиме масі атмосфери помноженій на прискорення вільного падіння g, яке знайдемо як $g = G \cdot \dfrac{M}{R^2}$ Маса Венери дорівнює $M = \rho\ (4/3)\pi R^3$. Приймаючи до уваги все це, маємо для маси атмосфери:

$$m = \frac{4\pi R^2 P}{g} = 4\pi R^2 P \cdot \frac{3R^2}{G \cdot 4\pi R^3 \rho} = \frac{3PR}{G\rho}$$

$$m = \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 6.052 \cdot 10^6}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5200} = 5.23 \cdot 10^{20} \text{ кг.}$$

Задача 3. (15 балів) Знайти відстань до добового (стаціонарного) супутника Марса від його поверхні.

Рішення Добовий супутник має період обертання T навколо планети рівний її зоряному періоду обертання навколо осі. Для кругової орбіти радіуса R, період буде дорівнювати

$T = \dfrac{2\pi R}{v}$, де v – перша космічна швидкість $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ (5 балів). Із цих двох формул одержуємо:

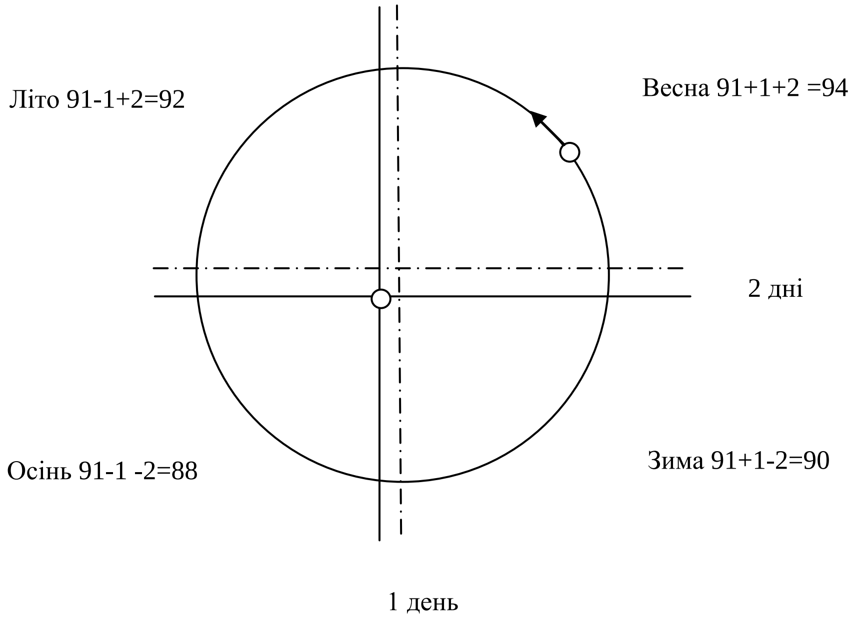
$$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = 2.024 \cdot 10^7 \text{ м} = 20240 \text{ км.}$$

Відстань супутника від поверхні буде на 3400 км менше, тобто 16840 км.

Задача 4. (15 балів) Древньогрецькі астрономи за спостереженнями моментів рівнодення і сонцестояння виявили нерівність чотирьох пір року. На які дати за сучасним календарем приходяться початки астрономічної весни, літа, осені та зими? Чому дорівнює їх тривалість? Як можна пояснити цю нерівність у межах системи світу Птоломея (геоцентричної системи), у якій всі рухи вважались круговими і рівномірними?

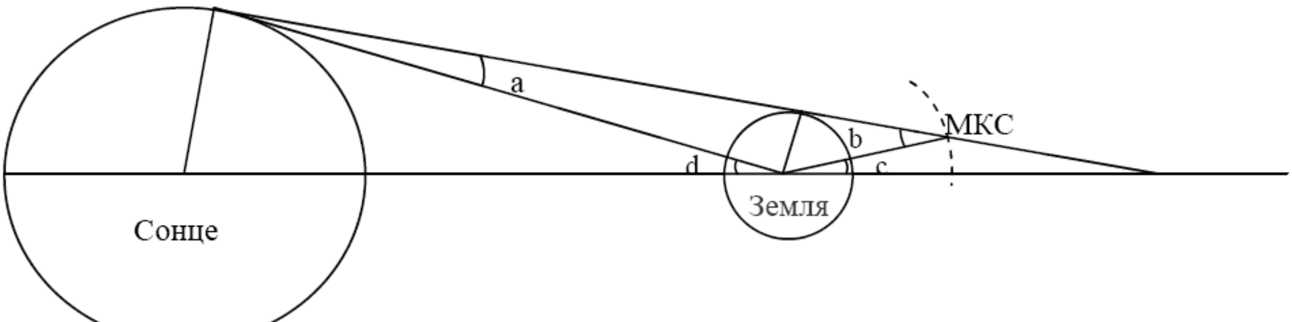
Рішення

За початок астрономічних пір року приймаються моменти проходження Сонця через точки рівнодення та сонцестояння. За сучасним календарем ці моменти приходяться на 21 березня, 22 червня, 23 вересня і 22 грудня (з можливим відхиленням на 1 день, що пов’язано з тривалістю календарного року у 365 або 366 днів). Виходячи з цього у теперішній час весна у північній півсфері продовжується 91 день, літо 93 дні, осінь 90 днів і зима 91 день (92 дні у високосному році). Древні визначили тривалість сезонів у 94, 92, 89 і 90 днів, відповідно. Вони пояснювали це ексцентричним положенням Землі відносно орбіти Сонця, що при рівномірному русі Сонця по орбіті навколо Землі продовжувало весну та осінь і скорочувало осінь та зиму (див. рисунок) або введенням диференту та епіциклу.



Задача 5. (30 балів) Міжнародна космічна станція робить один оборот навколо Землі за 91,5 хвилин на висоті 350 км. Знайти максимальний час руху через тінь Землі у допущенні кулеподібної форми Землі.

Рішення Кутова півширина тіні (кут c) може бути знайдена за рисунком, де d кут під яким видно радіус Сонця, a – кут, під яким видно радіус Землі з Сонця, $\sin b = R/r$. Нехтуючи кутом a, котрий дорівнює всього 8.8″, одержуємо, що кут $c = b - d = 72{,}05 - 0{,}27 = 71{,}78^0$. Повна кутова ширина тіні буде $143{,}56^0$. Довжина частини кола, що відповідає цьому куту буде $l = 2\pi rc/180 = 16855$ км. Швидкість руху станції дорівнює довжині кола орбіти, поділеній на період P її обертання навколо Землі = 7,7 км/с. Таким чином, час перебування станції у тіні t = 16855/7,7 = 2189 с = 36,5 хвилин.



Задача 6. Якщо вивести космічний апарат (КА) в точку на прямій Земля-Сонце, яка лежить на відстані 1.5 млн. км від Землі, то він буде обертатися навколо Сонця, увесь час залишаючись на цієї прямій.

1) Як довести, що це дійсно буде так?
2) Для спостережень за яким тілом Сонячної системи це буде зручно й чому?

Рішення Це буде так в тому випадку, якщо векторна сума гравітаційних прискорень від Сонця й від Землі буде дорівнювати доцентровому прискоренню, яке необхідне для руху по круговій орбіті. Себто:

$$G\frac{M}{R-r^{\ 2}} - G\frac{m}{r^2} = \frac{v^2}{R-r},$$

де M – маса Сонця, m – маса Землі, R –відстань від Сонця до Землі, r –відстань від Землі до КА, G – гравітаційна стала, v – швидкість руху апарата по коловій орбіті $v = \frac{2\pi(R-r)}{T}$, а T – період обертання по цієї орбіті, що дорівнює 1 року. Розрахуємо ліву частину:

$$G\left[\frac{M}{(R-r)^2} - \frac{m}{r^2}\right] = 6.67\cdot 10^{-11}\cdot\left[\frac{2\cdot 10^{30}}{(150-1.5)^2\cdot 10^{18}} - \frac{6\cdot 10^{24}}{1.5^2\cdot 10^{18}}\right] =$$

$$= 6.67\cdot 10^{-11}\cdot\left[\frac{2\cdot 10^{8}}{1.485^2} - \frac{6\cdot 10^{6}}{1.5^2}\right] = 5.88\cdot 10^{-3}\,м/с^2$$

Розраховуємо праву частину:

$$4\pi^2\frac{R-r}{T^2} = 4\cdot 3.1416^2\cdot\frac{1.485\cdot 10^{11}}{(365.2422\cdot 24\cdot 3600)^2} = 39.478\cdot\frac{1.485\cdot 10^{11}}{9.9584\cdot 10^{14}} = 5.88\cdot 10^{-3}\ \text{м/с}^2.$$

Оскільки прискорення рівні, апарат буде рухатися по круговій орбіті з радіусом 148.5 млн. км з тім же періодом, що й Земля на більш віддаленій орбіті (150 млн. км). В точці, про яку йде мова, зручно розташувати космічний апарат для спостережень Сонця. На відміну від навколоземної орбіти виключаються періоди, коли апарат знаходиться в тіні Землі, та положення Землі й Сонця відносно апарату залишається завжди незмінним.

III этап Всеукраинской ученической олимпиады по астрономии 2011/2012 учебного года. Харьковская область. Задачи и их решения для 10 класса

Задача 1. (5 баллов) Какими характеристиками должно обладать небесное тело, чтобы его можно было назвать планетой Солнечной Системы.

Решение Планета – это небесное тело, которое:
а) Обращается вокруг Солнца.
б) Имеет массу, достаточную чтобы собственная гравитация превосходила прочность вещества, и тело приняло форму, близкую к сферической (гидростатически равновесную).
в) В процессе своего формирования поглотило (притянуло и включило в свой состав) прочие тела в окрестности своей орбиты. При невыполнении условия (в) тело будет по современной номенклатуре называться «карликовой планетой».

Задача 2. (5 баллов) Определите массу атмосферы Венеры, если давление на поверхности равно $P = 1{,}0 \times 10^7$ Па.
Решение По определению, давление есть сила, которая действует на единичную площадь поверхности

$$P = F/S.$$

Сила, действующая на всю поверхность Венеры, будет равна массе атмосферы умноженной на ускорение свободного падения g, которое определим как $g = G \cdot \dfrac{M}{R^2}$. Масса Венеры равняется $M = \rho\,(4/3)\pi R^3$. Принимая во внимание вышесказанное, получим для массы атмосферы:

$$m = \frac{4\pi R^2 P}{g} = 4\pi R^2 P \cdot \frac{3R^2}{G \cdot 4\pi R^3 \rho} = \frac{3PR}{G\rho}$$

$$m = \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 6.052 \cdot 10^6}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5200} = 5.23 \cdot 10^{20}\ \text{кг}.$$

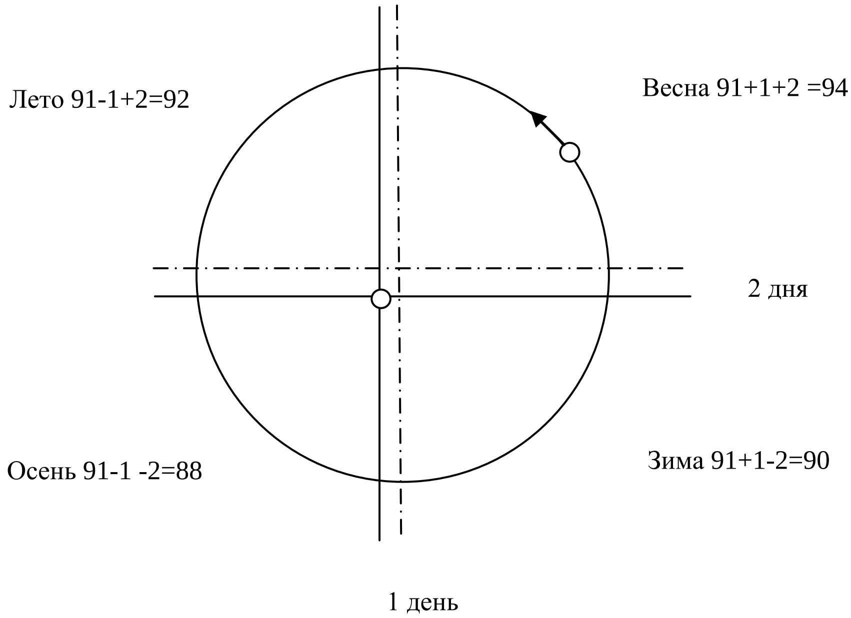
Задача 3. (15 баллов) Найти расстояние до суточного (стационарного) спутника Марса от его поверхности.
Решение Суточный спутник имеет период обращения T вокруг планеты равный её звездному периоду вращения вокруг оси. Для круговой орбиты радиуса R период будет равен
$T = \dfrac{2\pi R}{v}$, где v – первая космическая скорость $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$. Из этих двух формул получаем:

$$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = 2.024 \cdot 10^7\ \text{м} = 20240\ \text{км}..$$

Расстояние спутника от поверхности будет на 3397 км меньше, т.е. 16840 км.

Задача 4. (15 баллов)
Древнегреческие астрономы по наблюдениям моментов равноденствий и солнцестояний обнаружили неравенство четырёх времён года. На какие даты по современному календарю приходятся начало астрономической весны, лета, осени и зимы? Чему равна их продолжительность? Как можно объяснить это неравенство в рамках системы мира Птолемея (геоцентрической системы), в которой все движения полагались круговыми и равномерными?
Решение. За начала астрономических времен года принимаются моменты прохождения Солнца через точки равноденствий и солнцестояний. По современному календарю эти моменты приходятся на 21 марта, 22 июня, 23 сентября и 22 декабря (с возможным отклонением на 1 день, связанным с продолжительностью календарного года в 365 или 366 дней). Поэтому в настоящее время весна в северном полушарии продолжается 91 день, лето 93 дня, осень 90 дней и зима 91 день. Древние определили продолжительность сезонов в 94, 92, 89 и 90 дней, соответственно. Они объясняли это эксцентрическим положением Земли относительно орбиты Солнца, что при

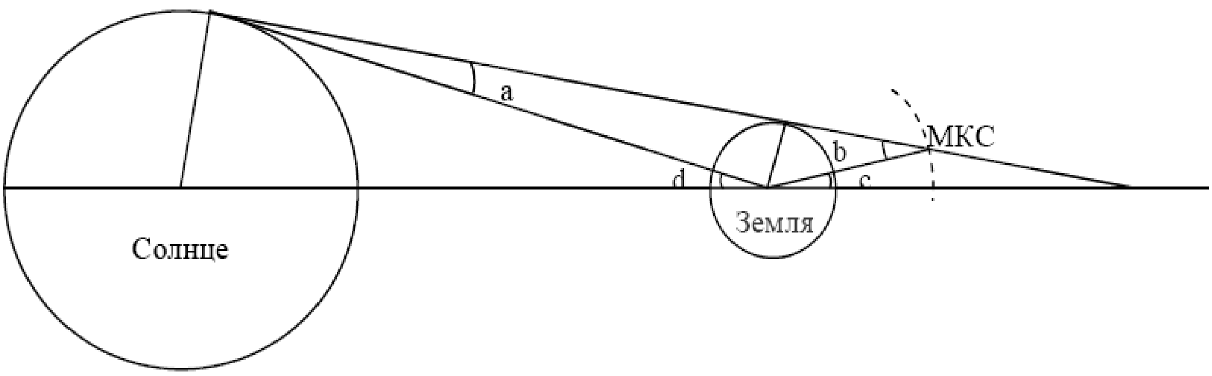
равномерном движении Солнца по орбите вокруг Земли удлиняло весну и осень и укорачивало осень и зиму (см. рисунок) либо введением дифферента и эпицикла.



Задача 5. (30 баллов) Международная космическая станция совершает один оборот вокруг Земли за 91,5 минут на высоте 350 км. Найти максимальное время движения через тень Земли в предположении шарообразной формы Земли.

Решение

Угловая полуширина тени (угол *c*) может быть найдена из рисунка, где *d* угол под которым виден радиус Солнца, *a* – угол, под которым виден радиус Земли с Солнца, sin*b* = *R/r*. Пренебрегая углом *a*, который равен всего 8.8″, получим, что угол *c* = *b* – *d* = 72,05 – 0,27 = 71,78^0. Полная угловая ширина тени будет 143,56^0. Длина части окружности, соответствующая этому углу будет $l = 2\pi rc/180$ = 16855 км. Скорость движения станции равна длине окружности орбиты, деленная на период *P* ее обращения вокруг Земли = 7,7 км/с. Таким образом, время пребывания станции в тени *t* = 16855/7,7 = 2189 с = 36,5 минут.



Задача 6.

Если вывести космический аппарат (КА) в точку на прямой Земля-Солнце, лежащую на расстоянии 1.5 млн. км от Земли, то он будет обращаться вокруг Солнца, все время оставаясь на этой прямой.

1) Как доказать, что это действительно будет так?
2) Для наблюдений за каким телом Солнечной системы это будет удобно и почему?

Решение Это будет так в том случае, если векторная сумма гравитационных ускорений от Солнца и от Земли будет равна центростремительному ускорению, необходимому для движения по круговой орбите. То есть:

$$G\frac{M}{(R-r)^2}-G\frac{m}{r^2}=\frac{v^2}{R-r},$$

где M – масса Солнца, m – масса Земли, R – расстояние от Солнца до Земли, r –расстояние от Земли до КА, G – гравитационная постоянная, v – скорость движения аппарата по круговой орбите $v=\frac{2\pi(R-r)}{T}$, а T – период обращения по этой орбите, равный 1 году. Вычисляем левую часть:

$$G\left[\frac{M}{(R-r)^2}-\frac{m}{r^2}\right]=6.67\cdot10^{-11}\cdot\left[\frac{2\cdot10^{30}}{(150-1.5)^2\cdot10^{18}}-\frac{6\cdot10^{24}}{1.5^2\cdot10^{18}}\right]=$$

$$=6.67\cdot10^{-11}\cdot\left[\frac{2\cdot10^{8}}{1.485^2}-\frac{6\cdot10^{6}}{1.5^2}\right]=5.88\cdot10^{-3}\,м/с^2$$

Вычисляем правую часть:

$$4\pi^2\frac{R-r}{T^2}=4\cdot3.1416^2\cdot\frac{1.485\cdot10^{11}}{(365.2422\cdot24\cdot3600)^2}=39.478\cdot\frac{1.485\cdot10^{11}}{9.9584\cdot10^{14}}=5.88\cdot10^{-3}\text{ м/с}^2.$$

Поскольку равенство выполняется, аппарат будет двигаться по круговой орбите с радиусом 148.5 млн. км с тем же периодом, что и Земля на долее удаленной орбите (150 млн.км).

В точке, о которой идет речь, удобно поместить космический аппарат для наблюдения Солнца. В отличие от околоземной орбиты исключаются периоды, когда аппарат находится в тени Земли, и положение Земли и Солнца относительно аппарата остается всегда неизменным.