

### III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії 2015/2016 навчального року. Харківська область. 10 клас.

**Задача 1.** (20 балів) Галілеєві супутники Юпітера мають такі видимі зоряні величини ( $m$ ) та великі півосі орбіт ( $a$ ): Іо  $m=5.0$ ,  $a = 422000$  км; Європа  $m=5.3$ ,  $a = 671000$  км; Ганімед  $m=4.6$ ,  $a = 1070000$  км; Каллісто  $m=5.6$ ,  $a = 1883000$  км. Визначте, чи можливо їх побачити неозброєним оком з Землі? Велика піввісь орбіти Юпітера  $\approx 5.2$  а.о.

**Розв'язок.** Будемо вважати, що ми спостерігаємо Юпітер у протистоянні, тобто середня відстань до Юпітера від Землі становить 4.2 а.о., а супутники знаходяться на максимальній відстані від Юпітера. Обчислимо кутову відстань у хвилинах дуги між Юпітером і супутниками для земного спостерігача:

для Іо,  $\alpha = 206265 \cdot R / (60 \cdot r) = 206265 \cdot 421700 / (60 \cdot 4.2 \cdot 149600000) = 2.3$ ;

для Європи,  $\alpha = 206265 \cdot 671100 / (60 \cdot 4.2 \cdot 149600000) = 3.7$ ;

для Ганімеда,  $\alpha = 206265 \cdot 1070400 / (60 \cdot 4.2 \cdot 149600000) = 5.8$ ;

для Каллісто,  $\alpha = 206265 \cdot 1882700 / (60 \cdot 4.2 \cdot 149600000) = 10.3$  (10 балів).

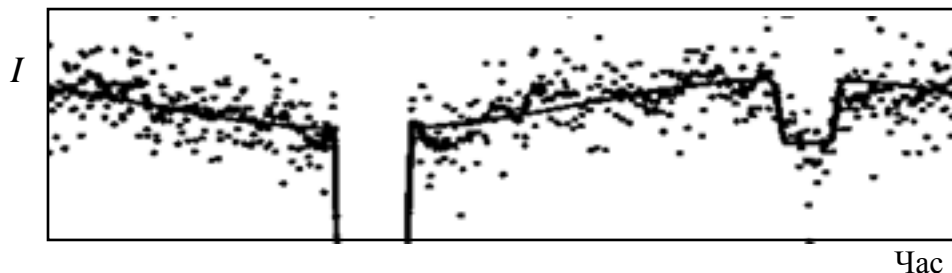
Враховуючи роздільну здатність людського ока біля 1 кутової хвилини, то теоретично всі супутники можна побачити неозброєним оком, якщо вони будуть на максимальній видимій відстані від Юпітера (8 балів). Але враховуючи яскравість Юпітера ( $-2.5$  зор. вел.) у порівнянні зі супутниками, невеликі кутові відстані Іо і Європи та слабкість блиску Каллісто, то найімовірніше неозброєним оком можна побачити Ганімед (2 бали).

**Задача 2.** (10 балів). Після першого картографування Марса космічним апаратом «Марінер-9», була встановлена висота марсіанської гори Олімп – близько 21 км від її підніжжя та її діаметр  $\approx 540$  км. Незабаром вийшло і фантастичне оповідання, в якому фігурувала ця гора. Два дослідники марсіанським ранком відправилися пішки до вершини Олімпу, і до вечора повернулися на базу. Вважаючи, що подорож тривала 12 годин, оцініть швидкість руху космонавтів. Проаналізуйте результат.

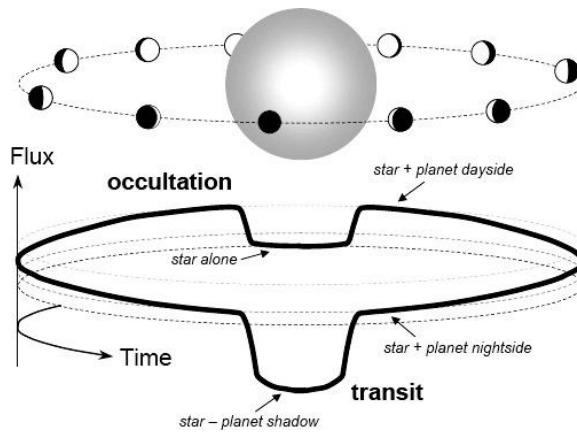
**Розв'язок.** Приймаючи форму Олімпу за конус, обчислимо довжина шляху в одну сторону, яка складе:  $\sqrt{21^2 + 270^2} \approx 271$ . Таким чином, швидкість руху становить  $271/6 \approx 45$  км/год. (5 балів).

**Аналіз.** З урахуванням того, що маса Марса дорівнює  $1/9$  земної, а радіус –  $\approx 1/2$  радіуса Землі, прискорення сили тяжіння ( $g = GM/R^2$ ) дорівнює  $g_{\sigma} = 0.11/0.5^2 \approx 0.44g_{\oplus}$ . Така сила тяжіння суттєво менша земної, але не настільки, щоб рухатися без засобів переміщення на протязі 12 годин зі швидкістю в  $\approx 9$  разів більшою за середню швидкість людини на Землі – 5 км/год. Отже, письменник-фантаст скоріше за все допустив похибку в своїх розрахунках. Можливо, він прийняв за протяжність маршруту подвоєне значення висоти гори – 42 км. У такому разі швидкість переміщення космонавтів складе 3.5 км/год, що цілком допустиме для півдобової мандрівки. (5 балів)

**Задача 3.** (10 балів) Нижче наведена крива блиску зорі НАТ-Р-7, яка одержана телескопом ім. Кеплера за 10 діб спостережень з високим часовим розділенням. Більш глибокий мінімум відповідає проходженню відкритої планети НАТ-Р-7b по диску зорі. Поясніть, звідки з'явився вторинний мінімум? Поясніть свою відповідь рисунком.



**Розв'язок.** Появу вторинного мінімуму демонструє нижченаведений рисунок. Між мінімумами потік формується із світла, що надходить від зорі та планети, яка спостерігається у різних фазах. Видно, що зі збільшенням фази, інтенсивність потоку зростає. Інтенсивність вторинного мінімуму, таким чином, відповідає потоку світла виключно тільки від зорі.



**Задача 4.** (10 балів) Вчені вважають, що маса відомої області Всесвіту (яка має радіус  $r_U \approx 10^{26}$  м) дорівнює  $\sim 10^{56}$  г. Вважаючи, що середня по Всесвіту маса зорі дорівнює значенню, отриманому з вивчення околиць Сонця  $\overline{M_*} = 0.4M_{\text{Сонця}}$ , а загальна маса зір складає 0.4% маси Всесвіту оцініть загальне число зір у Всесвіті.

**Розв'язок.** Число зір у Всесвіті за умови задачі складає

$$N_{\Sigma^*} = \frac{0.004}{0.4} \frac{10^{56}}{2 \cdot 10^{33}} \approx 10^{21} \text{ (10 балів).}$$

**Задача 5.** (25 балів) Розрахуйте і порівняйте сили тиску на Місяць сонячного вітру (можна вважати що він повністю складається з протонів) і сонячного світла. Концентрація часток сонячного вітру на відстані 1 а.о., залежно від рівня сонячної активності, змінюється в діапазоні від 4 до 12 частинок в  $1 \text{ см}^3$ , а їх швидкість - від 300 до 700 км/с. Імпульс фотона з енергією  $E$  становить  $p = E/c$ .

**Розв'язок.** Із другого закону Ньютона слідує, що сила дорівнює зміні імпульсу тіла за одиницю часу (при постійній масі):  $F = ma = m(\Delta V)/\Delta t = \Delta(mV)/\Delta t$ . (5 балів)

Будемо вважати, що частинки сонячного вітру "прилипають" до Місяця, передаючи йому свій імпульс, приросту ж маси Місяця можна знехтувати. Нехай  $V$  – швидкість часток сонячного вітру,  $n$  – їх концентрація, тоді за одиницю часу на одиницю поверхні Місяця попаде  $nV$  частинок, що принесуть імпульс  $m_p(nV)V$ . Тоді, сила тиску на Місяць, що одержана всією опроміненою вітром півсферою за одиницю часу є -  $\pi R^2 m_p (nV)V = 3.14 \cdot (1.737 \cdot 10^6 \text{ м})^2 \cdot (3 \cdot 10^5 \text{ м/с})^2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot 4 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3} = 5.7 \text{ кН}$ . (10 балів). Це мінімальна оцінка, використовуючи максимальні величини для концентрації та швидкості частинок сонячного вітру, імпульс буде дорівнювати 93 кН. (5 балів)

Сила світлового тиску визначається сумарним імпульсом поглинутих фотонів за одиницю часу. Фотон з енергією  $E$  має імпульс  $p = E/c$ , де  $c$  – швидкість світла. Якщо на площу  $S$  падає нормально  $n$  фотонів за секунду, кожен з яких має енергію  $E$  то, оскільки освітленість  $I$  ( $\text{Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ ) можна виразити через світність Сонця, світловий тиск на тіло буде дорівнювати  $F = \pi R^2 \cdot L / (c \cdot 4\pi r^2)$ , де  $L$  – світність Сонця,  $r$  – відстань до Місяця від Сонця (1 а.о.). Тоді  $F = 43.2 \text{ МН}$ . (10 балів) Тобто тиск світла в 4650 разів більший від максимальних значень швидкості та концентрації сонячного вітру і в 7600 раз більший від мінімальних. (5 балів)

**Задача 6.** (25 балів) У результаті тертя у верхніх шарах атмосфери механічна енергія супутника Землі за багато обертів зменшилася на 2%. Орбіта супутника при цьому залишилася круговою. Як змінилися параметри орбіти: радіус  $r$ , швидкість  $V$ , період обертання  $T$ ?

**Розв'язок.** Сила тяжіння Землі створює доцентрове прискорення супутника, що дорівнює  $(V_I)^2/r$ , де  $r$  - радіус орбіти, а  $V_I$  - невідома поки швидкість супутника. Припустимо, що орбіта проходить поблизу поверхні Землі, так що  $r$  практично дорівнює радіусу Землі  $R$ . Тоді, якщо не враховувати опір, що його створює атмосфера, супутник буде рухатись з прискоренням  $g$ , направленим до центра Землі. Значить,  $g = (V_I)^2/R$  і тоді  $V_I = (gR)^{1/2}$ . Яка повинна бути швидкість  $V$  руху по коловій орбіті любого радіусу, більшого  $R$ ? Прискорення вільного падіння зменшується при віддаленні від центра Землі у відношенні, зворотному відношенню квадратів відстаней від центра:  $g_r \cdot r^2 = g_R R^2$ . Прискорення  $g_r$  на відстані  $r$  від центра Землі  $g_r = g_R R^2 / r^2 = V^2 / r$ . Звідки  $V = V_I (R/r)^{1/2}$ . Таким чином, зі збільшенням радіусу орбіти швидкість штучного супутника зменшується.

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{mV_1 R}{2r} = \frac{mgR^2}{2r} \quad (5 \text{ балів})$$

При переході з орбіти радіуса  $r$  на орбіту  $(r+\Delta r)$ , вважаючи  $\Delta r$  набагато менше  $r$ , супутник виконує роботу проти сил тяжіння. У системі відліку, що пов'язана з Землею, механічна енергія супутника  $E$  є сумою його кінетичної енергії  $E_k$  ( $mv^2/2$ ) і потенціальної енергії взаємодії з Землею  $E_{II}$  ( $mg,r$ ). Оскільки потенціальна енергія від'ємна, то повна енергія є:

$$E_k + E_{II} = \frac{mgR^2}{2r} - \frac{mgR^2}{r} = -\frac{mgR^2}{2r}$$

Тепер можна зв'язати зміну повної енергії зі зміною радіуса орбіти:

$$E(r+\Delta r) = E(r) + \Delta E = -\frac{1}{2} \frac{mgR^2}{(r+\Delta r)} = -\frac{1}{2} \frac{mgR^2}{r(1+\Delta r/r)} \approx -\frac{1}{2} \frac{mgR^2}{r} \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right) = E(r) \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right). \quad (5 \text{ балів})$$

$$E + \Delta E = E(r) \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right);$$

При перетвореннях використовувалось те, що вираз  $(1+x)^{-1}$ , де  $x$  набагато менше 1, наближено дорівнює  $(1-x)$ . Тоді:

$$-\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta r}{r}.$$

Очевидно, що радіус орбіти зміниться також на 2%.

Зміну швидкості супутника при зміні орбіти легко виразити через зміну радіуса за допомогою співвідношення:

$$V^2 = \frac{gR^2}{r}.$$

Звідки слідує, що  $(V + \Delta V)^2 = \frac{gR^2}{r + \Delta r}$ . (5 балів)

Вважаючи, що зміна швидкості також мала в порівнянні з величиною швидкості та використовуючи розклад у ряд  $(1+x)^2 = 1+2x$ , знаходимо:

$$V^2 \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^2 \approx V^2 \left(1 + 2 \frac{\Delta V}{V}\right) = \frac{gR^2}{r} \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right).$$

Враховуючи також, що  $V^2 = \frac{gR^2}{r}$ ;

одержуємо відносну зміну швидкості, яка виражена через зміну радіуса орбіти:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta r}{2r} = \frac{\Delta E}{2E} = 0.01.$$

Швидкість супутника збільшилась на 1%. Зверніть увагу, що слабе гальмування супутника в верхніх шарах атмосфери приводить до збільшення його швидкості! (5 балів)

Зосталось знайти зміну періоду обертання. Це легко зробити, якщо знати  $\Delta r/r$  і  $\Delta V/V$ , оскільки період зв'язаний з радіусом орбіти і швидкістю супутника співвідношенням  $T=2\pi r/V$ . Записуючи значення періоду обертання при змінених радіусі орбіти і швидкості супутника:

$$T + \Delta T = 2\pi \left( \frac{r + \Delta r}{V + \Delta V} \right),$$

та перетворюючи, подібно тому, як це робилось вище, одержимо:

$$\frac{2\pi r}{V} \left( \frac{1 + \Delta r/r}{1 + \Delta V/V} \right) \approx T \left( 1 + \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta V}{V} \right), \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta V}{V} = -\frac{3\Delta E}{2E} = -0.03.$$

Період змінився на 3%. (5 балів)

Довідкові дані:

Маса протона		$1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
Сонце:	Маса	$2 \cdot 10^{30}$ кг
	Світність	$3.8 \cdot 10^{26}$ Вт
Земля:	Велика піввісь орбіти	1 а.о. = 150 млн км
Місяць:	Радіус	1737 км
	Альbedo	0.08